Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Ahmed Draia D'Adrar

Faculté des Sciences et de la Technologie

Département des Mathématiques et Informatique

MÉMOIRE

Pour l'obtention du diplôme de

MASTER

En Mathématiques

Spécialité :

Analyse Fonctionnelle et Applications

Présenté par

Yamina BOUKHEIRA

Thème

Étude de quelques Propriétés sur les Variétés Riemanniennes et Applications

---

Soutenu publiquement le 04/06/2018 devant le jury composé de :

M. Laid GASMI	Maître de assistant A	Université d'Adrar	Président
M. Hadj MAZOUZI	Maître de assistant A	Université d'Adrar	Rapporteur
M. Nassira SOUDDI	Maître assistant A	Université d'Adrar	Examinateur

2017–2018

Dédicace

Je dédie ce modeste travail:

À mes trés chers parents qui me permissent de continuer mes études dans les meilleurs conditions.

À tous mes fréres et mes soeurs.

À mes amis sans de promotion $2^{éme}$ annés Mastre Mathématiques.

À mes familles BOUKHEIRA.

@ B. Yamina @

Remerciements

En premiér et avant tout, je remercie le Dieu de m'avoir donné la force de réaliser ce travail.

Je tiens a remercier, mon encadreur: "Mr. MAZOUZI Hadj" pour sa direction j'ai eu le plaisir de travailler gràce à ces consiels ces critiques scientifiques.

Je remercie, maitenant, les nombres des Jury, Mr. Laid GASMI et Mme. Nassira SOUDDI.

Je remercie chaleureusement, les professeurs de mathématique sans exception et tous les enseignants qui ont contribué à notre formation du primaire jusqu'à l'Université.

En fin, je remercie tout seux qui de prés ou de loin à l'accompléssement de ce mémoire.

Table des matières

0.1 Introduction 1

1 Rappels et définition **4**

1.1 Notion d'espace topologique 4

1.1.1 Espace topologique 4

1.1.2 Espace séparé 5

1.1.3 Différentielle d'une application sur un espace normé 6

1.1.4 Application Homéomorphismes et difféomorphismes 9

2 variété différentiable **13**

2.1 Notion de variété différentiable 13

2.1.1 Variété topologique 13

2.1.2 Atlas sur une variété topologique 14

2.1.3 Variété différentiable 16

2.1.4 Application différentiable sur une variété différentiable 20

2.2 Notion d'espace tangent à une variété différentiable en un point donné 22

2.2.1 Courbe tracé sur une variété différentiable 22

2.2.2 Espace tangente 23

2.2.3 Champ de vecteurs 24

2.2.4 Dérivation et champs de vecteurs 25

3 Variétés Riemanniennes **26**

3.1 Métrique Riemannienne 26

3.1.1 Variété Riemannienne 29

3.1.2 Connexion sur une variété Différentiable 29

3.1.3 Crochet de Lie 30

3.1.4 Torsion de la variété Différentiable: 31

3.1.5 Notion de la Connexion Riemannienne 32

3.1.6 Notion fondamentale en géométrie riemannienne 36

4 Opérateurs sur une variété Riemannienne **45**

4.1 Les isomorphismes canoniques 45

4.1.1 Isomorphisme bemol b et diése # 45

4.1.2 L'opérateur gradient sur une variété Riemannienne 50

4.1.3 L'opérateur Divergence sur les champs de vecteur 51

4.1.4 L'opérateur Laplacien sur une variété Riemannienne 53

4.2 **Conclusion et perspectives** 57

Résumé

Dans ce mémoire nous avons introduit les rappels et définition de topologie génerale et calcul différentielle des application sur un espace vectoriel normé et nous avons étudie la variété différentiable à n dimension, et on introduit quelques propriétés et définitions des variété riemannienne.

En fin nous avons donné les opérateurs sur une variété Riemannienne.

Le but de ce travaille j'ai représenté aux simplifier l'étude sur une variété de dimension n à l'espace $\mathbb{R}^n$ à partir de définir une carte sur cette variété par suite l'espace tangent de chaque point.

Abstract

In this thesis we have introduced the recollections and definition of general topology and differential calculus of applications on a normed vector space and we have studied the differentiable manifold with n dimension, and introduced some properties and definitions of the Riemannian manifolds.

In the end we gave the operators on a Riemannian variety.

The aim of this work I represented to simplify the study on a variety of dimension n to the espace $\mathbb{R}^n$ from to define a map on this variety consequently the tangent space of each point.

0.1 Introduction

En mathématiques, il ya plusieurs branches parmi les quelles a géométrie, cette derniére étudie les propriétés et les relations des formes et des figures dans un espace.

La géométrie se divise en deux types, la géométrie analytique et la géométrie différentielle:

• La géométrie analytique: Partie de la géométrie ayant recours au calcul algébrique et analytique. Elle facilité l'étude des propriétés géométriques des courbes et des surfaces et de leurs présentations graphiques ou la recherche de "lieux géométriques".

• La géométrie différentielle: Est une continuité du calcul infinitisimal, elle permet d'étudiér grâce aux techniques du calcul défférentiel, une nouvelle famille d'éspaces topologiques appelées "variété différentiable", permettant la rénovation de la vieile géométrie des courbes et des surfaces de $\mathbb{R}^3$ à la Gauss Darboux, et en la placant selon un esprit actuel dans un cadre contemporain, le calcul différentiel permet d'étudier l'evolution d'un phénoméne au voisinage d'un instant donné (sa vitesse, son accélération) lors que celui ci décrit une portion d'un espace dans lequel on a une structure d'espace vectoriel normé. Notre but est de montrer qu'on peut faire de l'analyse mathématique en dehors des espaces qui n'admettent pas de structure des espace vectoriel normé.

Empiriquement, nous pouvons mesurer des portions de la terre nous déplaçant entre les villes, les pays on peut décrire presque toutes les régions du globe terrestre d'une maniére adéquate en utilisant un petit livre, appelée atlas formée d'un ensemble des cartes qui sont des ouverts du plan $\mathbb{R}^2$, ici chaque point du globe peut être représenté dans une carte.

En s'inspirant de la cartographie, on définit une variété différentiable de dimension n par un atlas qui est un ensemble d'ouvert de $\mathbb{R}^n$ appelée cartes.

la géométrie riemannienne est une branche de la géométrie différentielle nommée en L'honneur

du mathématicien Benhard Riemann qui introduisit le concept fondateur de variété géométrique, elle étend des méthodes de la géométrie analytique en utilisant des coordonnées locales pour effectuer l'étude d'espaces courbes sur lesquels existent des notions d'angle et de longueur, la premiére pas de la géométrie riemannienne au 19ième siècle et en particulier lors d'une conférence inaugurale intitulée sur les hypothèses sous-jacentes à la géométrie, la géométrie riemannienne s'est fortement développée durant la seconde moitié du 20ième siècle, mais les premiers travaux dans ce domaine se confondent avec la naissance du concept de variété différentielle, il c'est arrété sur les changements de cartes d'un atlas.

C'est whitney en (1944) qui à réglé définitivement ce probléme, c'est dans les changements de cartes ou réside la notion de variété différentiable.

La formulattion géométrique de ces notions à conduit à introduire des métriques sur des variétés différentiables (variétés riemanniennes).

Ce mémoire contient quatres chapites, dans le premiére chapitre est un rappel de quelque notion de la topologie générale, et on parle à les définitions des: espace topologie, espace séparé, espace vectoriel normé, la différentielle d'une application sur un espace vectoriel normé, application homéomorphisme et difféomorphisme sur un espace vectoriel normé.

Dans le deuxiéme chapitre, on étudie quelques notions de base de géométrie différentielle: les variétés différentielles, espaces tangentes et applications tangentes, champs de vecteurs et sa dérivation.

Le troixiéme chapitre on va etudier variété riemannienne, on parle à la définition de la métriques Riemanniennes et variété Riemanninne, connexion sur une variété différentielle, crochet de Lie, torsion de la variété différentiable, notion de connexion Riemannienne, notion fondamon-

tale en géométrie Riemannienne.

Et dans le derniér chapitre, on introduit les isomorphisme diése et bemol, divergence d'un tenseur sur une variété Riemannienne, Laplacien des fonctions différentiable, divergence sur ces champs de vecteur et quelques propriétés.

Le mémoire se termine par une conclusion générale et quelques perspectives.

Chapitre 1

Rappels et définition

Dans ce premiér chapitre, on rappelle les outils de la topologie générale, de calcul différentiel et les applications définis sur un espace vectoriel normé qui seront utilisé dans la suite.

1.1 Notion d'espace topologique

1.1.1 Espace topologique

Définition 1.1.1 *Soit X un ensemble non vide, une famille T de parties de X est une topologie si et seulement si:*

1) $X, \varnothing \in T$.

2) $\forall\ A, B \in T, A \cap B \in T$.

3) soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille quelconque de X, alors $\cup_{i \in I} A_i \in T$.

- Les éléments de T sont appelés des ouverts de T.
- Le couple (X, T) est appelé un espace topologique sur X.

Exemple 1.1.2 *Soit* $X = \{1, 2, 3, 4\}$.

$T = \{\varnothing, X, \{1\}, \{3, 4\}, \{1, 3, 4\}\}$ est une espace topologie sur X puis qu'il vérifié les trois axiomes précédentes.

Définition 1.1.3 *Un espace topologique* X *est dit espace* T_1 *si et seulement si:* $\forall a, b \in X$ *avec,* $a \neq b$ *alors* $\exists v_a \in V(a), v_b \in V(b)$.

($V(a)$ designe voisinage de a et $V(b)$ designe voisinage de b) tel que $b \notin v_a$ et $a \notin v_b$.

Remarque 1.1.4 v_a *et* v_b *ne sont pas nécéssairement disjoints.*

Lemme 1.1.5 *Un espace topologique* X *est un espace* T_1 *si et seulement si les* $\{x\} \subset X$ *sont des fermés.*

Preuve. $\Rightarrow$) Supposons que X est un espace T_1, il suffit de montre que $\{x\} \subset X$ est fermé.

Soit $y \in \{x\}^c$ (on suppose que X plus qu'on point) alors on peut choisir un ouvert $V_y \subset X$ qui contient à y mais pas $x \Rightarrow \{x\}^c = \bigcup_{y \in \{x\}^c} V_y$ est un ouvert.

Donc $\{x\}$ est fermé.

$\Leftarrow$) on suppose que $\forall$ $\{x\}$ est fermé, et on montre que X est un espace T_1.

$\forall x, y \in X$ avec $x \neq y \Rightarrow \exists$ un ouvert U telle que $x \notin U \subset \{x\}^c$, (il est de méme de y).

Donc X est un espace T_1. $\square$

1.1.2 Espace séparé

Définition 1.1.6 *Un espace topologique* X *est un espace séparé ou Hausdorf ou espace* T_2 *si et seulement si:*

$$\forall a, b \in X \text{ et } a \neq b, \exists\ v_a \in V(a) \text{ et } v_b \in V(b), \text{ telque } v_a \cap v_b = \varnothing.$$

Exemple 1.1.7 *Toute espace métrique est séparé.*

Soit (X, d) un espace métrique.

Soit $x, y \in X$, $x \neq y$ on pose $0 < \frac{d(x,y)}{2} = r$ et $U = B(x, r), V = B(y, r)$.

Supposons que $z \in U \cap V$.

Alors on a: $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < 2r = d(x, y)$ contradiction.

Donc $U \cap V = \varnothing \Rightarrow X$ est séparé.

Remarque 1.1.8 *Un espace séparé est toujours espace T_1, mais la réciproque est fausse.*

Exemple 1.1.9 *La topologie grossiére ($T_g = \{\varnothing, X\}$) est un espace T_1.*

En effet $\forall x, y \in X$ avec $x \neq y$ et $\forall B(x, r) = B(y, r) = X$.

Donc $B(x, r) \cap B(y, r) = \varnothing \Rightarrow T_g$ n'est pas séparé.

1.1.3 Différentielle d'une application sur un espace normé

Définition 1.1.10 *Soit E un espace vectoriel sur un corps commutatif $\Bbbk$ ($\mathbb{R}$, ou $\mathbb{C}$).*

On appelle norme sur E, toute application $\|.\| : E \to \mathbb{R}^+$ vérifiant les conditions suivantes:

(1) $\forall x \in E, \|u\| \geq 0$ et $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

(2) $\forall (\lambda, x) \in \Bbbk \times E, \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.

(3) $\forall (x, y) \in E \times E, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Un espace vectoriel munie d'une norme est appelé espace vectoriel normé.

Exemple 1.1.11 *Les trois normes usuelles sur* $\Bbbk$ *(*$\mathbb{R}$*, ou* $\mathbb{C}$*).*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ considérons $\forall x = (x_1, ..., x_n) \in \Bbbk$ les réels $\|x\|_1, \|x\|_2, \|x\|_\infty$ définis par:
$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|, \|x\|_2 = (\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2)^{\frac{1}{2}}, \|x\|_\infty = Max_{1 \leq k \leq n} |x_k|.$

Définition 1.1.12 *Soient* E, F *deux espaces vectoriels normés* U *un ouvert de* E *et* $f : U \longrightarrow F$ *une application, on dit que* f *est différentiable en* $x_0 \in U$ *s'il existe une application linéaire* g *de* E *dans* F *telle que:*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\| f(x) - f(x_0) - g(x - x_0) \|_F}{\| x - x_0 \|_E} = 0$$

Où $f(x_0 + h) - f(x_0) - g(h) = o(\| h \|)\epsilon(h)$ *avec* $\lim_{\|h\| \to 0} \epsilon(h) = 0$ *et* $(h = x - x_0)$

On dit que g est la différentielle de f en x_0, et est noté par $D_{x_0} f$.

- On dit que f est différentiable sur U s'elle est différentiable en tout point x de U.
- f est de classe C^1 si s'application différentielle est continue.
- Si f admet k-différentielles continues, on dit que f est de classe C^k $(k \geq 1)$.

Exemple 1.1.13 *Tout application constante est différentiable en tout point* a *de* U *et* $Df \equiv 0$*.*

Proposition 1.1.14 *Si* f *est différentiable au point* $x_0 \in U$*, alors l'application linéaire continue* g *de la définition est unique.*

Preuve. Soient g_1 et g_2 deux application linéaire continue de E dans F telle que $\forall h \in E$, avec $x_0 + h \in U$, on ait:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + g_1(h) + o(\| h \|)\epsilon_1(h) = f(x_0) + g_2(h) + o(\| h \|)\epsilon_2(h).$$

Avec $\lim_{\|h\|\to 0} \epsilon_1(h) = \lim_{\|h\|\to 0} \epsilon_2(h) = 0$.

Alors on a $\|(g_1 - g_2)(h)\| = o(\| h \|)\epsilon(h)$, tel que $\epsilon = \epsilon_1 - \epsilon_2$.

puis que $\lim_{\|h\|\to 0} \epsilon_1(h) = \lim_{\|h\|\to 0} \epsilon_2(h) = 0$, il en est de méme de ϵ.

Donc $\forall r > 0$, il existe $\alpha > 0$ telle que pour tout $h \in E, \| h \| \leq \alpha \Rightarrow \|\epsilon(h)\| \leq r$.

On a alors pour

$$\| h \| \leq \alpha, \|(g_1 - g_2)(h)\| = o(\| h \|)\epsilon(h) \leq r \| h \| .$$

Il s'en suite que $\|(g_1 - g_2)\| \leq r \ \forall \ r > 0$.

Donc $\|(g_1 - g_2)\| = 0$, et on obtient $g_1 = g_2$. □

Proposition 1.1.15 *Soient E, F, G des espaces vectoriels normés, U un ouvert de E, V un ouvert de $F, f : U \to V, g : V \to G, a \in U, b = f(a) \in V$.*

Si f est différentiable en a et g différentiable en b, alors $g \circ f$ est différentiable en a, et

$$D(g \circ f)(a) = Dg(f(a)) \circ Df(a).$$

Preuve. On a $(g \circ f)(a + h) - (g \circ f)(a) = g(f(a + h)) - g(f(a))$.

Puis que f est différentiable au point a, on a alors

$$\begin{cases} f(a+h) - f(a) = Df(a)(h) + \epsilon(h)\|h\| \\ \lim_{h\to 0} \epsilon(h) = 0 \end{cases}$$

Posons $Df(a)(h) + \epsilon(h)\|h\| = l$, donc $g(f(a + h)) = g(f(a) + l)$.

Puis que g est différentiable au point $f(a)$, on a alors

$$\begin{cases} g(f(a)+l) = g(f(a)) + Dg(f(a))(l) + \epsilon'(l)\|l\| \\ \lim_{l\to 0} \epsilon'(l) = 0 \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned} g(f(a)+l)-g(f(a)) &= Dg(f(a))(l)+\epsilon'(l)\|l\| \\ &= Dg(f(a))(Df(a)(h)+\epsilon(h)\|h\|)+\epsilon'(l)\|l\| \\ &= Dg(f(a))(Df(a)(h))+Dg(f(a)(\epsilon(h)\|h\|)+\epsilon'(l)\|l\| \\ &= Dg(f(a))\circ Df(a)(h)+\alpha(h)\|h\|). \end{aligned}$$

Où $\alpha(h) = Dg(f(a))(\epsilon(h)\|h\|) + \epsilon'(Df(a)(h) + \epsilon(h)\|h\|)\|Df(a)(\frac{h}{\|h\|}) + \epsilon(h)\|$.

Comme l'application $Dg(f(a)) \circ Df(a)(h)$ est linéaire continue, il suffit de montrer que $\lim_{l=0} \alpha(l) = 0$. □

1.1.4 Application Homéomorphismes et difféomorphismes

Définition 1.1.16 *Soient E, F deux espaces vectoriels normés, et U, W deux parties de E et F respectivement, une application $f : U \longrightarrow W$ est un homéomorphisme si:*

1) f est bijective.

2) f, f^{-1}sont continue.

On dit alors U, W sont des homéomorphes.

Proposition 1.1.17 *Supposons que X, Y sont des espaces topologiques que X est homéomorphisme à Y et Y est séparé.*

Alors X est séparé.

Preuve. Soit $f : X \to Y$ est un homéomorphisme et $x_1, x_2 \in X$ avec $x_1 \neq x_2$.

Alors $f(x_1), f(x_2) \in Y$ et $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Par la condition de Hausdorff, il existe des ensembles ouverts V_1, V_2 de Y tels que

$$f(x_1) \in V_1, f(x_2) \in V_2$$

Et $V_1 \cap V_2 = \varnothing \Rightarrow x_1 \in f^{-1}(V_1), x_2 \in f^{-1}(V_2) \Rightarrow f^{-1}(V_1) \cap f^{-1}(V_2) = f^{-1}(V_1 \cap V_2) = \varnothing$.

Donc X est séparé. $\square$

Définition 1.1.18 *Soient E , F deux espaces vectoriels normés et U, W deux parties de E et F respectivememt, une application $f : U \to W$ est appelée difféomorphisme si les condition suivant sont satisfaites:*

1) f est bijective.

2) $f \in C^1(U)$.

3) $f^{-1} \in C^1(W)$.

Si on a: la condition 1) avec $f \in C^\infty(U)$ et $f^{-1} \in C^\infty(W)$, on dit que f est $C^\infty-$difféomorphisme.

Exemple 1.1.19 *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $(x, y) \mapsto f(x, y) = (x + y, x - y)$*

$$\forall X(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, Y(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2,\ f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2) \iff \begin{cases} x_1 + y_1 = x_2 + y_2 & (1) \\ x_1 - y_1 = x_2 - y_2 & (2) \end{cases}.$$

De (1)+(2) on obtient: $x_1 = x_2$, en remplaçant x_1 dans (1) on obtient: $y_1 = y_2$. Alors f est injective.

$\forall\ Z = (z_1\ , z_2) \in \mathbb{R}^2$

$$Z = f(x, y) \iff \begin{cases} z_1 = x + y & (1) \\ z_2 = x - y & (2) \end{cases}.$$

De (1)+(2) on obtient: $x = \frac{1}{2}(z_1 + z_2)$, en remplaçant x dans (1) on obtient: $y = \frac{1}{2}(z_1 - z_2)$ donc f est surjective, en fin f est bijective.

f est définit et différentiable sur $\mathbb{R}^2$, et ses dérivés partielles sont:

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (1,1)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (1,-1)$ continues sur $\mathbb{R}^2$. Donc $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$

$f^{-1}(x,y) = \left(\frac{1}{2}\ (x+y), \frac{1}{2}(x-y)\right)$ est définit et différentiable sur $\mathbb{R}^2$, et ses dérivés partielles sont: $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ continues sur $\mathbb{R}^2$.

Donc $f^{-1} \in C^1(\mathbb{R}^2)$

Alors f est un difféomorphisme sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque 1.1.20 *f difféomorphisme $\Rightarrow$ f homéomorphisme.*

La réciproque est fausse une application $f : U \to V$ de classe C^1 peut admettre une fonction inverse f^{-1} continue sans étre un difféomorphisme.

Par exemple $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3$ est bijective et C^1. Son inverse est $f^{-1}(y) = x^{\frac{1}{3}}$ qui est continue mais pas différentiable en 0.

Remarque 1.1.21 *1) Pour tout ouvert U de E, Id_U est un C^1-difféomorphisme de U sur U.*

• Si $f : U \to V$ est un C^1-difféomorphisme et $g : V \to W$ est un C^1-difféomorphisme, alors $f \circ g$ est un C^1-difféomorphisme de U sur W.

• Si $f : U \to V$ est un C^1-difféomorphisme, alors $g : V \to U$ est un C^1-difféomorphisme.

2) Il se peut que deux ouverts U, V étant donnés, il n'existe pas de C^1-difféomorphisme de U sur V.

Définition 1.1.22 *Soient E, F deux espaces vectoriels normés, U ouvert de E et $f : U \longrightarrow F$ de classe $C^k (k \geq 1)$, on dit que f est immersion (respectivement submersion) en $x \in U$ si $D_x f$ est injective (respectivement surjective).*

- Si E et F de dimension finies alors: $\dim E = \dim \ker (D_x f) + \dim \operatorname{Im} (D_x f)$.
- Si f est une immersion en $E, \dim E = \dim \operatorname{Im} (D_x f) = rang\ (f)$.
- Si f est submersion en $E, \dim E = \dim \ker (D_x f) + \dim\ F \geq \dim\ F = rang(f)$.

Chapitre 2

variété différentiable

Dans ce chapitre, On va etudier la variété différentielle, on parle de la variété topologie et rappele la définition de carte et atlas, application différentiable sur une variété différentiable.

Et on va étudier la courbe tracée sur une variété, espace tangente, champs de vecteurs et sa dérivation, voir [1], [2], [6], [7], [12].

2.1 Notion de variété différentiable

2.1.1 Variété topologique

Définition 2.1.1 *Soit M un ensemble non vide, M est une variété topologique de dimension n et de classe $C^k, k \geq 1$ si:*

- M est un espace topologie séparé.
- Pour tout $x \in M$ il existe un ouvert U de M contenant x et un homéomorphisme définie par: $\varphi : U \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ et de classe C^k.

i) Le couple (U, φ) est dite carte sur M.

ii) Deux cartes (U, φ) et (W, ψ) sur M sont compatibles (équivalentes) si:

1) $U \cap W \neq \varnothing$.

2) $\psi \circ \varphi^{-1} : \psi(U \cap W) \longrightarrow \varphi(U \cap W)$ est difféomorphisme.

2.1.2 Atlas sur une variété topologique

Définition 2.1.2 *Une atlas A sur M de dimension n et de classe C^k $(k \geq 1)$ est une famille de carte notée $A = \{(U_i, \varphi_i)_{i \in I}\}$ telque:*

1) Les ouverts U_i recouvrent M, i,e: $M = \cup_{i \in I} U_i$, $\forall i \in I$.

2) Touts les cartes de A sont compatibles deux à deux .

Exemple 2.1.3 *Soit $\mathbb{R}$ une variété topologique, en effet $\mathbb{R}$ est séparé, et l'application identité $Id_{\mathbb{R}} : x \mapsto x$ est un homéomorphisme.*

Donc $\forall$ $U =]-\infty, 1[, V =]0, +\infty[$, on définit

$$\varphi : \begin{array}{l} U \to \varphi(U) \\ x \mapsto \varphi(x) = e^x \end{array} \quad \text{et} \quad \psi : \begin{array}{l} V \to \psi(V) \\ x \mapsto \psi(x) = x^2 \end{array}$$

$$\varphi^{-1} : \begin{array}{l} \varphi(U) \to U \\ y \mapsto \ln y \end{array} \quad \text{et} \quad \psi^{-1} : \begin{array}{l} \psi(V) \to V \\ y \mapsto \sqrt{y} \end{array}$$

on a: $U \cap V \neq \varnothing$ car $\frac{1}{2} \in U$ et $\frac{1}{2} \in V$ et $U \cup V = \mathbb{R}$.

φ et ψ sont continues et φ^{-1}, ψ^{-1}sont aussi continues. Ils sont bijectives. (surjective par construction et injective par définition) donc φ et ψ sont des homéomorphisme .

$\psi \circ \varphi^{-1}(x) = (\ln x)^2$ *est bijective et de classe* C^1 *et* $(\psi \circ \varphi^{-1})^{-1} = e^{\sqrt{x}}$ *est de classe* C^1 *donc* $\psi \circ \varphi^{-1}$ *est difféomorphisme.*

Alors la famille $\{(]0, +\infty[, x^2), (]-\infty, 1[, e^x)\}$ *est un atlas sur* $\mathbb{R}$.

Exemple 2.1.4 $M = \mathbb{R}^n$

• $\mathbb{R}^n$ est un espace topologique séparé.

On prend $U = \mathbb{R}^n, \varphi = Id_{\mathbb{R}^n}$.

Alors $\{(\mathbb{R}^n, Id_{\mathbb{R}^n})\}$ est un atlas de dimension n et de classe C^∞.

• $Id_{\mathbb{R}^n} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ homéomorphisme, et $Id_{\mathbb{R}^n} \circ (Id_{\mathbb{R}^n})^{-1} = Id_{\mathbb{R}^n}$ de classe C^∞.

Exemple 2.1.5 $M = E$ *un* $\mathbb{R}-$*espace vectoriel de dimension* n.

Soit $\{e_1, ..., e_n\}$ est une base de E.

$\forall x \in E, \exists$ unique $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$ tq $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$

Alors $\varphi : E \to \mathbb{R}^n$ définie par $x \mapsto (x_1, ..., x_n)$

$A = \{(E, \varphi)\}$ atlas de classe C^∞.

Exemple 2.1.6 $M_n(\mathbb{R})$ *matrice réelles de type* (n, n).

$M_n(\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n^2, alors d'aprés l'exemple (2.1.5)

On $A = \{(M_n(\mathbb{R}), \varphi)\}$ avec:

$\varphi : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{n^2}$ définie par:

$$\begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, ..., a_{2n} \\ \vdots \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}, a_{n2}, ..., a_{nn} \end{pmatrix} \mapsto (a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n}, a_{21}, a_{22}, ..., a_{2n}, ..., a_{n1}, a_{n2}, ..., a_{nn}).$$

Exemple 2.1.7 *M est un espace topologique séparé muni d'un atlas de dimension n est de classe C^r, V un ouvert de M.*

$A = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i\in I}$, alors $A_V = \{(U_i \cap V, \varphi_i/_{U_i\cap V})\}_{i\in I}$ est un atlas de V de dimension n et de classe C^r.

Exemple 2.1.8 $GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R})/ \det A \neq 0\}$.

$GL(n, \mathbb{R})$ est un ouvert de $M_n(\mathbb{R})$, car on a det : $M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ continue car polynomiale.

$\mathbb{R}^*$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ et $GL(n, \mathbb{R}) = \det(\mathbb{R}^*)$ ouvert de $M_n(\mathbb{R})$.

Comme $M_n(\mathbb{R})$ posséde un atlas de dimension n^2 et de classe C^∞, alors d'aprés exemple (2.1.6) on a $GL(n, \mathbb{R})$ posséde un un atlas de dimension n^2 et de classe C^∞.

2.1.3 Variété différentiable

Définition 2.1.9 *Soit M une variété topologique de dimension n et de classe C^k $(k \geq 1)$, on dit que M est une variété différentiable de classe C^k $(k \geq 1)$ s'il existe un atlas $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i\in I}$ de M telque $\forall\ i, j\ U_i \cap U_j \neq \varnothing$, l'application: $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i\ (U_i \cap U_j\ ) \longrightarrow \varphi_j\,(U_i \cap U_j\ )$ est de classe C^k.*

Remarque 2.1.10 *Stucture de variété différentiable de classe C^k de dimension n est la donnée d'un couple (M, A) oŭ M est une variété topologique et A est un atlas.*

Remarque 2.1.11 *Soit M est une variété différentiable de dimension n et de classe C^k, U est un ouvert de $M(U \subset M)$.*

Alors d'aprés l'exemple (2.1.7) U est une variété différentiable de dimension n et de classe C^k .

Systéme de cordonnées

Définition 2.1.12 *Soit (U, φ) une carte de la variété différentiable M.*

Pour $x \in U, \varphi(x) \in \mathbb{R}^n$ peut s'écrire

$$\varphi(x) = (x_1(x), x_2(x), ..., x_n(x))$$

On appelle le coordonnées de x dans la carte (U, φ) et $(x_1, x_2, ..., x_n)$ sont les application coordonnées.

Exemple 2.1.13 *$\mathbb{R}^n$ est une variété différentiable de dimension n est de classe C^∞ .*

D'aprés l'exemple (2.1.4) on a $\{(\mathbb{R}^n, Id_{\mathbb{R}^n})\}$ est un atlas à une seule carte.

Ainsi $\mathbb{R}^n$ est une variété différentiable de dimension n et de classe C^∞ .

2) Soit la sphére $S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$ est une variété différentiable de dimension 2 et de classe C^∞.

On considére les ouvertes $U_N = S^2 \setminus N$ et $U_S = S^2 \setminus S$ telle que: $N = (0, 0, 1)$ et $S = (0, 0, -1)$

L'application: $\varphi_N : U_N \to \varphi(U_N) \subset \mathbb{R}^2$ définie par: $\varphi_N(x, y, z) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right)$, φ_N est continue sur U_N car ses composantes sont continues sur U_N.

φ_N : est bijective car:

- φ_N est surjective par constraction.

- φ_N est injective, par définition:

$\forall\ (X,Y,Z),(X',Y',Z') \in U_N$

$$\begin{aligned}
\varphi_N(X,Y,Z) &= \varphi_N(X',Y',Z') \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{X}{1-Z} = \frac{X'}{1-Z'} \\ \frac{Y}{1-Z} = \frac{Y'}{1-Z'} \end{cases} .....(1) \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{X^2}{(1-Z)^2} = \frac{X'^2}{(1-Z')^2} \\ \frac{Y^2}{(1-Z)^2} = \frac{Y'^2}{(1-Z')^2} \end{cases} .....(2) \\
&\Rightarrow \frac{X^2+Y^2}{(1-Z)^2} = \frac{X'^2+Y'^2}{(1-Z')^2} \\
&\Rightarrow \frac{1-Z^2}{(1-Z)^2} = \frac{1-Z'^2}{(1-Z')^2} \\
&\Rightarrow \frac{1+Z}{1-Z} = \frac{1+Z'}{1-Z'} \\
&\Rightarrow (1+Z)(1-Z') = (1-Z)(1+Z') \\
&\Rightarrow Z = Z'
\end{aligned}$$

on remplace se résultat dans (1), on obtient: $\begin{cases} X = X' \\ Y = Y' \end{cases}$

Alors $(X,Y,Z) = (X',Y',Z')$, donc φ_N est injective sur U_N, ainsi φ_N est bijective.

$\varphi_N^{-1} : \varphi_N(U_N) \subset \mathbb{R}^2 \to U_N$, avec

$$\begin{aligned}
(x,y) &= (\frac{X}{1-Z}, \frac{Y}{1-Z}) \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} X = x(1-Z)...(1) \\ Y = y(1-Z)...(2) \\ X^2+Y^2+Z^2 = 1...(3) \end{cases}
\end{aligned}$$

En remplassant (1) et (2) dans (3) on obtient:

$$\begin{aligned}
(x(1-Z))^2+(y(1-Z))^2+Z^2 &= 1 \Rightarrow x^2(1-2Z+Z^2)+y^2(1-2Z+Z^2)+Z^2=1 \\
&\Rightarrow (x^2+y^2+1)Z^2-2(x^2+y^2)Z+x^2+y^2-1=0 \\
&\Rightarrow \Delta'=(x^2+y^2)^2-(x^2+y^2+1)(x^2+y^2-1)=1 \\
&\Rightarrow Z_1=\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1} \text{ et } Z_2=\frac{x^2+y^2+1}{x^2+y^2+1}=1
\end{aligned}$$

Z_2 est rejeté car si $Z_2=1 \Rightarrow X^2+Y^2+Z_2^2=1 \Rightarrow X^2+Y^2=0 \Rightarrow X=Y=0 \Rightarrow (0,0,1)\notin U_N$.

$Z_1=\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}$ car: $Z_1\neq 1$.

Si $Z_1=1 \Rightarrow \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}=1 \Rightarrow x^2+y^2-1=x^2+y^2+1 \Rightarrow -1=1$ contradiction.

L'application inverse est donnée par:

$$\varphi_N^{-1}(x,y)=\left(\frac{2x_1}{1+x_1^2+x_2^2},\frac{2x_2}{1+x_1^2+x_2^2},\frac{-1+x_1^2+x_2^2}{1+x_1^2+x_2^2}\right).$$

est aussi continue car ses composantes continues.

Donc φ_N est un homéomorphisme de $\mathbb{R}^3$ sur U_N.

L'application: $\varphi_N:\ U_N\to\varphi(U_N)\subset\mathbb{R}^2$ définie par: $\varphi(x,y,z)=\left(\frac{x}{1-z},\frac{y}{1-z}\right)$ est un homéomorphisme de $\mathbb{R}^3$ sur U_1.

L'application inverse est donnée par:

$$\varphi^{-1}(x,y)=\left(\frac{2x_1}{1+x_1^2+x_2^2},\frac{2x_2}{1+x_1^2+x_2^2},\frac{-1+x_1^2+x_2^2}{1+x_1^2+x_2^2}\right).$$

De méme l'application: $\varphi_S:\ U_S\to\varphi(U_S)\subset\mathbb{R}^2$ définie par: $\varphi(x,y,z)=\left(\frac{x}{1+z},\frac{y}{1+z}\right)$ est aussi un homéomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur U_1.

L'inverse pour expression:

$$\varphi^{-1}(x,y)=\left(\frac{2x_1}{1+x_1^2+x_2^2},\frac{2x_2}{1+x_1^2+x_2^2},\frac{1-x_1^2-x_2^2}{1+x_1^2+x_2^2}\right).$$

L'application de changement de cartes:

$$\varphi_S^{-1} \circ \varphi_N : \varphi_N^{-1}(U_N \cap U_S) = \mathbb{R}^3 - \{(0,0,1)\} \to \mathbb{R}^3 - \{(0,0,1)\} = \varphi_S^{-1}(U_N \cap U_S).$$

S'écrit:

$$\varphi_S^{-1} \circ \varphi_N(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2} \right).$$

Qui est clairement est de classe C^∞, ainsi que son l'inverse.

Donc $\{(U_N, \varphi_N), (U_S, \varphi_S)\}$ est une Atlas sur S^2.

En suite S^2 est une variété différentiable de dimension 2 et de classe C^∞.

Remarque 2.1.14 *On peut généraliser pour*

$$S^n = \{(x_1\ , x_2\ , ...x_{n+1}\ ) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1^2 + x_2^2, ..., x_{n+1}^2 = 1\}$$

est une variété de dimension n est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^{n+1}$.

2.1.4 Application différentiable sur une variété différentiable

Définition 2.1.15 *Soient $(M, A)\,, (N, B)$ deux variétés différentiable de dimension n, m respectivement .Une application $f : M \to N$ est différentiable de classe C^r, si pour tout $x \in M$, il existe une carte $(U, \varphi) \in A$ autour de x, de classe C^r , et une carte $(V, \psi) \in B$ de classe C^r, telles que: $f\,(U) \subset V$ et $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ soit de classe C^r.*

Exemple 2.1.16 *$\forall\,(S^2\ , A_N)\,, (S^2\ , B_S)$ deux variétés différentiable de dimention 2 sur $\mathbb{R}^n$ et l'application*

$$f : S^2 \ \longrightarrow S^2$$

$$(x,y,z) \longmapsto f \ \ (x,y,z) = \ \ (x,y,z)$$

$\forall\,(U_N,\varphi_N)\in A$ *de* S^2*, on prend* $U_N=S^2\setminus\{N,S\}$

$$\begin{aligned}\varphi_N:\qquad & U_N\to\mathbb{R}^2\\ & (x,y,z)\ \mapsto(\tfrac{x}{1-z},\tfrac{y}{1-z})\end{aligned}$$

est de classe C^∞ *sur* U_N *alors* (U_N,φ_N) *de classe* C^∞

et $\forall\ (U_S,\varphi_S)\in B$ *de* S^2*, on prend* $U_S=S^2\setminus\{S\}$

$$\begin{aligned}\varphi_S:\qquad & U_S\to\mathbb{R}^2\\ & (x,y,z)\ \mapsto(\tfrac{x}{1+z},\tfrac{y}{1+z})\end{aligned}$$

est de classe C^∞ *sur* U_S *alors* (U_S,φ_S) *de classe* C^∞ *et* $f\,(U_N)\subset U_S$.

En effet $\varphi_S\circ f\circ\varphi_N^{-1}:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}\varphi_S\circ f\circ\varphi_N^{-1}\,(x,y)&=\varphi_S\circ f\left(\tfrac{2x}{x^2+y^2+1},\tfrac{2y}{x^2+y^2+1},\tfrac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}\right)\\ &=\varphi_S\left(\tfrac{2x}{x^2+y^2+1},\tfrac{2y}{x^2+y^2+1},\tfrac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}\right)\\ &=\left(\tfrac{x}{x^2+y^2},\tfrac{y}{x^2+y^2}\right)\end{aligned}$$

$\varphi_S\circ f\circ\varphi_N^{-1}$ *est de classe* C^∞ *, alors* f *est différentiable et de classe* C^∞.

Proposition 2.1.17 *Soient* f *et* g *deux fonction de classe* C^r *telleque:*

$f:M\longrightarrow N$ *et* $g:N\longrightarrow K$ *alors* $g\circ f$ *est de classe* C^r.

Preuve. Soient $f:M\longrightarrow N$ de classe C^r i,e: $\exists\,(U,\varphi)$de M et (V,ψ) de N de classe C^r tellque $f\,(U)\subset V$ et $\psi\circ f\circ\varphi^{-1}$ est de classe C^r. et $g:N\longrightarrow K$ de classe C^r i,e: $\exists\,(U_1\,,\phi)$de N et (V_1,ω) de K de classe C^r tellque $g\,(U_1)\subset V_1$ et $\omega\circ g\circ\varphi^{-1}$ est de classe C^r.

En effet $g\circ f:M\longrightarrow K$ on suppose que $f\,(U)=U_1\subset V$ et $\psi=\phi$,$\forall\,p\in N\Longrightarrow g\circ f\,(U)\subset V_1$

$\omega\circ g\circ f\circ\varphi^{-1}=\omega\circ g\circ\phi^{-1}\circ\psi\circ f\circ\varphi^{-1}$ comme $\omega\circ g\circ\phi^{-1}$ et $\psi\circ f\circ\varphi^{-1}$ sont de classe C^r.

alors $\omega\circ g\circ f\circ\varphi^{-1}$ est de classe C^r, donc $g\circ f$ est de classe C^r. $\square$

2.2 Notion d'espace tangent à une variété différentiable en un point donné

2.2.1 Courbe tracé sur une variété différentiable

Définition 2.2.1 *Soit M une variété différentiable de dimension n et de class C^k, ($k \geq 1$ ou C^∞) et x un point de M. On note:*

$$C(M,\gamma) = \{\gamma :]-\epsilon,\epsilon[\to M, t \mapsto \gamma(t) \text{ et } \gamma \text{passant par } x, \text{ telque } \gamma(0) = x\}.$$

S'appelle courbe tracée sur M .

Remarque 2.2.2 *Si $\gamma : I \to M \Rightarrow C(M,\gamma) = \{\gamma : I \to M, \gamma(t_0) = x\}$.*

Définition 2.2.3 *Deux courbes γ_1 et γ_2 sont tangentes au point x où $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = x$ s'il existe une carte (U,φ) telle que $x \in U$ et $\frac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma_1)(0) = \frac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma_2)(0)$.*

Remarque 2.2.4 *La définition est independante de la carte choisie. En effet si (V,ψ) est une autre carte en x, alors on a*

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\psi \circ \gamma_1)(0) &= \frac{d}{dt}((\psi \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \gamma_1))(0) \\
&= (\frac{d}{dt}(\psi \circ \varphi^{-1}))(\varphi \circ \gamma_1)(0)[\frac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma_1)(0)] \\
&= (\frac{d}{dt}(\psi \circ \varphi^{-1}))(\varphi \circ \gamma_2)(0)[\frac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma_2)(0)] \\
&= \frac{d}{dt}((\psi \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \gamma_2))(0) = \frac{d}{dt}(\psi \circ \gamma_2)(0).
\end{aligned}$$

On défini une relation d'équivalence. (c'est à dire une relation qui est transitive, symétrique, et réflexive) sur l'ensemble de courbes passant par x : $\gamma_1 \sim \gamma_2$ si elles sont tangents en x.

2.2.2 Espace tangente

Définition 2.2.5 *Un vecteur tangent à M en x est une classe d'équivalence de courbe tangentes en x.*

L'espace tangent à M en x, noté T_xM, est l'ensemble des vecteurs tangents à M en x. défini par:

$T_xM = \{[\gamma]$ classe d'équivalence : $\gamma \in C(M,\gamma)$, avec $\gamma(0) = x\} = C(M,\gamma)/_R$ l'espace quotient.

Définition 2.2.6 *On appelle fibré tangent à M, noté par TM, est la réunion de tous les espaces tangents T_xM*

$$TM = \bigcup_{x\in M} T_xM.$$

Ainsi, chaque élément de TM, peut être identifié à un couple (x, X_x), où $x \in M$ et $X_x \in T_xM$.

•$T^*M = \cup_{x\in M} T_x^*M$ est appelé le fibré cotangent à M.

Application tangente linéaire

Définition 2.2.7 *Soient M et N deux variété différentiable, $f : M \longrightarrow N$ une application différentiable, l'application tangente linéaire de f en $x \in M$ est*

$$\begin{aligned} df : \qquad & T_xM \longrightarrow T_{f(x)}N \\ x \longmapsto & df(x) = \tfrac{d}{dt}\left(f \circ \gamma\right)(0) \end{aligned}$$

Ou γ est une courbe passant par x et $\gamma'(0) = x$.

2.2.3 Champ de vecteurs

Soit M une variété de classe C^k, on appelle champ de vecteur de classe C^k sur M toute application

$$\begin{aligned} \chi : \quad & M \to T_xM \\ & x \mapsto \chi(x) = X_x \end{aligned}$$

telle que $\chi(x) \in T_xM$, pour tout $x \in M$. On note $\Gamma^k(TM)$ (resp. $\Gamma(TM)$) l'ensemble des champs de vecteurs C^k (resp.C^∞) sur M.

Remarque 2.2.8 *Soient* $(x_1, ..., x_n)$ *les coordonnées au voisinage de* x, *une base de* T_xM *est donné par:* $\{\frac{\partial}{\partial x}_i(x)\}_{1\leq i\leq n}$

$$\forall x \in M, X_x \in T_xM \Rightarrow X_x = \sum_{i=1}^{n} X_x^i \frac{\partial}{\partial x_i} \overset{convention}{=} X_x^i \frac{\partial}{\partial x_i} \Rightarrow \dim T_xM = \dim M = n.$$

Avec: $\begin{aligned} X^i : \quad & M \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto X_x^i \end{aligned}$

Fonction coordonnées du champ de vecteur.

- $\{dx_i\}_{i=1,...,n}$ la base de T_x^*M: est un espace dual de T_xM .
- $w(x) \in T_x^*M \Rightarrow w(x) = \sum_{i=1}^{n} w^i(x)dx_i = w^i(x)dx_i$.
- T_x^*M : est appelé un espace cotongent à M au point x.
- T_x^*M ={forme linéaire sur T_xM }.
- T_xM et T_x^*M : $\mathbb{R}-$espace vectoriel tel que $\dim T_x^*M = \dim T_xM$.

2.2.4 Dérivation et champs de vecteurs

Définition 2.2.9 *Soit M une variété différentiable de dimension n.*

Une dérivation en x est une application linéaire $D : C^{\infty}(M) \to \mathbb{R}$ qui vérifie pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et tout $f, g \in C^{\infty}(M)$:

1) $D \cdot (\alpha f + \beta g) = \alpha D \cdot f + \beta D \cdot g$. ...linéarité.

2) $D \cdot (fg) = fD(g) + D(f)g$....Leibniz.

• Soit $X \in \mathfrak{X}(M), (Xf)(x) = \sum_{i=1}^{n} X^i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$.

Donc nous identifions $\mathfrak{X}(M)$ aux dérivations de C^{∞}.

Chapitre 3

Variétés Riemanniennes

Dans ce chapitre on introduit quelques propriétés et définitions des variété riemannienne que on accompagnons par quelques exemples, voir [3], [5], [8], [10], [14], [15].

3.1 Métrique Riemannienne

Définition 3.1.1 *Soit M une varieté differentiable de dimension n. Pour tout $x \in M$*

$$T_x^{(p,q)}M = \underbrace{T_xM \otimes T_xM \otimes ...}_{p\ fois} \otimes \underbrace{T_x^*M \otimes T_x^*M \otimes ...}_{q\ fois}$$

l'espace des tenseurs de type (p,q)sur l'espace tangent à M en x.

Définition 3.1.2 *On appelle champ de tenseurs de type (p,q)sur M, une application différentiable.*

$$T: \quad M \to T^{(p,q)}M$$

$$x \mapsto T_x \in T_x^{(p,q)}M$$

qui exprime une carte (U, φ) *avec coordonnées locales* $(x_1, x_2, ..., x_n)$ *comme:*

$$T = \sum_{i,j} T^{i_1,i_2,...,i_p}_{j_1,j_2,...,j_q} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \otimes ... \otimes \frac{\partial}{\partial x_{i_p}} \otimes dx_{i_1} \otimes ... \otimes dx_{i_q}.$$

Où $T^{i_1,i_2,...,i_p}_{j_1,j_2,...,j_q}$ *sont des nombres réels.*

- On note $T^{(p,q)}M = \bigcup_{x \in M} T^{(p,q)}_x M$. L'ensemble des champ de tenseur de type (p, q).

1) Un champ de vecteurs $\mathfrak{X}$ est un tenseur de type $(1, 0)$.

2) Une 1- forme différentielle sur M est un tenseur de type $(0, 1)$.

Définition 3.1.3 *Soit* M *une variété différentiable.*

Une métrique Riemannienne g *sur* M *est un champ de tenseur de type* $(0, 2)$*, telque*

1- g *est* $C^\infty(M)$*-bilinéaire.*

2- g *est définie positive:* $g(X, Y) \geq 0, \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

3- g *application symétrique:* $g(X, Y) = g(Y, X) \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

4- g *non dégénérée:* $g(X, Y) = 0$, *pour tout* $Y \in \mathfrak{X}(M) \Rightarrow X = 0_{\mathfrak{X}(M)}$.

Remarque 3.1.4 *Soit* $(U, \varphi) \in A$, $(U, x_1, x_2, ..., x_n)$ *système de coordonées de* X *et* $(U, \frac{\partial}{\partial x_i})$.

Le repère de l'espace tangent et dx_i *la base de l'espace dual.*

1- On note $g_{ij} = g(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j})$. *la matrice associée à* g*, comme* g *est symétrique:*

$$g_{ij} = g_{ji} = g(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}).$$

2- g *est définie positive i,e* $\det(g_{ij}) > 0$.

3- g *est non dégénérée i,e* $\det(g_{ij}) \neq 0$.

Exemple 3.1.5 *Sur* $M = \mathbb{R}^3$, *on pose* $g = dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$.

La matrice associe à g *est:* $g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1- g est bilinéaire. car: soient $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(M)$, *et* $f, h \in C^\infty(M)$

$$\begin{aligned} g(fX_1 + hX_2, Y) &= (dx)^2(fX_1 + hX_2, Y) + (dy)^2(fX_1 + hX_2, Y) + (dz)^2(fX_1 + hX_2, Y) \\ &= dx(fX_1 + hX_2)dx(Y) + dy(fX_1 + hX_2)dx(Y) + dz(fX_1 + hX_2)dz(Y) \\ &= fdx(X_1)dx(Y) + hdx(X_2)dx(Y) + fdy(X_1)dy(Y) + hdy(X_2)dy(Y) \\ &\quad + fdz(X_1)dz(Y) + hdz(X_2)dz(Y) \\ &= fg(X_1, Y) + hg(X_2, Y). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(X, fY_1 + hY_2) &= (dx)^2(X, fY_1 + hY_2) + (dy)^2(X, fY_1 + hY_2) + (dz)^2(X, fY_1 + hY_2) \\ &= fg(X, Y_1) + hg(X, Y_2). \end{aligned}$$

2- $\det(g_{ij}) = 1 \neq 0$ alors g est non dégénérée.

3- $g_{12} = g_{21} = 0$ et $g_{13} = g_{31} = 0$ et $g_{23} = g_{32} = 0$ alors g est symétrique.

4- $\det(g_{ij}) = 1 > 0$ alors g est définie positive.

Donc g est une métrique Riemannienne sur $\mathbb{R}^3$.

Exemple 3.1.6 *Soit* $g = x^2(dx)^2 + x(dy)^2 + (dz)^2$. *est-elle métrique riemannienne.*

La matrice associe à g est $g_{ij} = \begin{pmatrix} x^2 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1- g est bilinéaire.

2- g est non dégénérée.

3- g est symétrique.

4- $\det(g_{ij}) = x^3 > 0$ *si* $x > 0$ *donc g est définie positive si* $x > 0$.

Alors g est une métrique riemannienne si et seulemet si $x > 0$.

3.1.1 Variété Riemannienne

Définition 3.1.7 *On appelle variété Riemannienne tout variété différentiable munie d'une métrique Riemannienne.*

Exemple 3.1.8 $(\mathbb{R}^3, g)$, $\mathbb{R}^3$ *muni de la métrique* $g = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$ *est une variété Riemannienne.*

3.1.2 Connexion sur une variété Différentiable

Définition 3.1.9 *Une connexion linéaire sur M (M est une variété différentiable) est une application :* $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$, *telle que, pour tout* $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ *et* $f \in C^\infty(M)$.

1) $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$.

2) $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$.

3) $\nabla_{X+Y}(Z) = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$.

4) $\nabla_X (fY) = X(f)Y + f \nabla_X Y$.

$\nabla_X Y$ est appelée dérivation covariante du champ de vecteur Y dans la direction du vecteur tangent X.

Remarque 3.1.10 *Dans un système de coordonnées (x_i) sur M, ∇ est complètement définie par les symboles de Christoffel $\Gamma_{ij}^k \in C^\infty(M)$ définis par $\nabla_{\partial_i}\partial_j = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \partial_k, \partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$ et $\Gamma_{ij}^k = (\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j})e^k$ où $\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x_i} \circ \varphi$. et $(e^k = dx_k)_{1\leq k\leq n}$ est la base de l'espace dual.*

3.1.3 Crochet de Lie

Définition 3.1.11 *Soit M une variété différentiable, le crochet de Lie noté $[\ ,\ ]$ est définie par: $[X, Y] = XY - YX$. $\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.*

Propriété 1 *Le crochet de Lie vérifiant les propriétés suivantes:*

1) $[,]$ est bilinéaire. (i.e: $[,]$ linéaire à gauche et à droite)

2) antisymétrique. (i.e: $[X, Y] = -[Y, X]$)

3) $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0, \forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. identité de Jacobi.

Si le crochet de Lie de deux champs de vecteurs est nul $[X, Y] = 0$, on dit que les deux champs de vecteurs commutent.

Preuve. 1) $[,]$ est bilinéaire.

En effet: soient $X_1, X_2, Y \in \mathfrak{X}(M)$ et $f, h \in C^\infty(M)$

$$\begin{aligned}
[fX_1 + hX_2, Y] &= (fX_1 + hX_2)Y - Y(fX_1 + hX_2) \\
&= fX_1Y + hX_2Y - YfX_1 - YhX_2 \\
&= f(X_1Y - YX_1) + h(X_2Y - YX_2) \\
&= f[X_1, Y] + h[X_2, Y].
\end{aligned}$$

De méme maniére par la linéarité à gauche.

2) $[,]$ est antisymétrique.

Soient $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ on a:

$$[X,Y] = XY - YX = -(YX - XY) = -[Y,X].$$

3) En effet: soient $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$

$$\begin{aligned}
[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] &= [X, YZ - ZY] + [Y, ZX - XZ] + [Z, XY - YX] \\
&= (X(YZ - ZY) - (YZ - ZY)X) + Y(ZX - XZ) \\
&\quad -(ZX - XZ)Y + (Z(XY - YX) - (XY - YX)Z) \\
&= XYZ - XZY - YZX + ZYX + YZX - YXZ \\
&\quad -ZXY + XZY + ZXY - ZYX - XYZ + YXZ \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

Remarque 3.1.12 • *Si X et Y sont de classe C^k, alors $[X,Y]$ est de classe C^{k-1}.*

• *L'expresion locale de crochet de Lie est:* $[X,Y] = (X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x_i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x_i}) \frac{\partial}{\partial x_j}$, *telque* $X = X^i \frac{\partial}{\partial x_i}$ *et* $Y = Y^i \frac{\partial}{\partial x_i}$.

• $[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}](f) = (\frac{\partial(f \circ \varphi_i^{-1})}{\partial x_i} \circ \varphi_i \frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{\partial(f \circ \varphi_j^{-1})}{\partial x_j} \circ \varphi_j) - \frac{\partial(f \circ \varphi_i^{-1})}{\partial x_i} \circ \varphi_i \frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{\partial(f \circ \varphi_j^{-1})}{\partial x_j} \circ \varphi_j)) \frac{\partial}{\partial x_j} = 0.$

3.1.4 Torsion de la variété Différentiable:

Définition 3.1.13 *Soit M une variété différentiable menu d'une connexion linéaire ∇.*

On appelle T torsion de la connexion ∇ un champ de tenseur de type $(1,2)$ définit par:

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y], \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$$

• **Expresssion en coordonnées locale de T:**

$X = X^i \frac{\partial}{\partial x_i}$,$Y = Y^j \frac{\partial}{\partial x_j}$.

$$\begin{aligned}
T(X,Y) &= \nabla_{X^i \frac{\partial}{\partial x_i}} Y^j \frac{\partial}{\partial x_j} - \nabla_{Y^j \frac{\partial}{\partial x_j}} X^i \frac{\partial}{\partial x_i} - [X^i \frac{\partial}{\partial x_i}, Y^j \frac{\partial}{\partial x_j}] \\
&= X^i(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} Y^j \frac{\partial}{\partial x_j}) - Y^j(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} X^i \frac{\partial}{\partial x_i}) - X^i \frac{\partial}{\partial x_i}(Y^j \frac{\partial}{\partial x_j}) + Y^j \frac{\partial}{\partial x_j}(X^i \frac{\partial}{\partial x_i}) \\
&= X^i(Y^j)\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} + X^i \frac{\partial}{\partial x_i}(Y^j \frac{\partial}{\partial x_j}) - Y^j(X^i)\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i} - Y^j \frac{\partial}{\partial x_j}(X^i \frac{\partial}{\partial x_i}) \\
&\quad -X^i \frac{\partial}{\partial x_i}(Y^j \frac{\partial}{\partial x_j}) + Y^j \frac{\partial}{\partial x_j}(X^i \frac{\partial}{\partial x_i}) \\
&= (X^i Y^j - Y^i X^j)\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j}.
\end{aligned}$$

Remarque 3.1.14 • $T(X,Y) = -T(Y,X)$.

3.1.5 Notion de la Connexion Riemannienne

Soit (M, g) une variété Riemannienne.

Définition 3.1.15 *Une connexion linéaire sur M est dit compatible avec la métrique g si:*

$$X.(g(Y,Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z).$$

Définition 3.1.16 *Sur une variérté riemannienne, il existe une unique connexion ∇ sur le fibré tangent TM tel que:*

1) La torsion de ∇ s'annule. (i.e: $T(X,Y) = 0_{\mathfrak{X}(M)}$,$\forall\ X, Y \in \mathfrak{X}(M)$).

2) La métrique riemannienne est paralléle. (i.e: $\nabla_X g = 0, \forall\ X \in \mathfrak{X}(M)$).

S'appelle la connexion de Levi-Civita sur M.

Théoréme 3.1.17 *Soit (M, g) une variété Riemannienne, il existe une connexion unique ∇ sur M telle que:*

1) ∇ est symétrique. (i.e: $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X, \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$).

2) ∇ est compatible avec g.

La connexion ∇ est appellée la connexion de Levi-Civita associée à la métrique g.

Dans les coordonnées locales $(x_1, x_2, ..., x_n)$, les symboles Christoffel pour cette connexion sont: $\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{m} g^{kl}(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l})$, où g_{ij} sont les coordonneés de g relativement à la carte (u, φ) et $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$ est la matrice inverse de g_{ij}.

Preuve. 1- On $T(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}) = (\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k)\frac{\partial}{\partial x_k} = 0$.

En effet

$$\begin{aligned} T(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}) &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i} - [\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}] \\ &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i} \text{ (car } [\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}] = 0) \\ &= (\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k)\frac{\partial}{\partial x_k}. \text{ telle que } \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k} \end{aligned}$$

$T(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}) = 0 \Rightarrow \Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k = 0$, (car $\frac{\partial}{\partial x_k} \neq 0$)$\Rightarrow \Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$.

Donc la connexion ∇ est de torsion T nulle.

2- $\nabla_X g = 0, \forall X \in \mathfrak{X}(M)$.

Soit $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. on a

$$\begin{aligned} X(g(Y,Z)) &= g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z).....(1) \\ Y(g(X,Z)) &= g(\nabla_Y X, Z) + g(X, \nabla_Y Z).....(2) \\ Z(g(X,Y)) &= g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y).....(3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1)-(2)+(3) &= g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) - g(\nabla_Y X, Z) - g(X, \nabla_Y Z) + g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y) \\ &= g(\nabla_X Y - \nabla_Y X, Z) + g(X, \nabla_Z Y - \nabla_Y Z) + 2g(Y, \nabla_Z X) + g(Y, \nabla_X Z - \nabla_Z X) \end{aligned}$$

Car $2g(Y, \nabla_Z X) + g(Y, \nabla_X Z - \nabla_Z X) = g(Y, \nabla_X Z) + g(\nabla_Z X, Y)$

Et comme g symétrique on a: (1)-(2)+(3)=$g([X,Y],Z)+g(X,[Z,Y])+2g(Y,\nabla_Z X)+g(Y,[X,Z])$.

par suite:

$$2g(\nabla_Z X, Y) = X(g(Y,Z)) - Y(g(X,Z)) + Z(g(X,Y)) - g([X,Y],Z) - g(X,[Z,Y]) - g(Y,[X,Z])$$

Alors

$$g(\nabla_Z X, Y) = \frac{1}{2}(X(g(Y,Z)) - Y(g(X,Z)) + Z(g(X,Y)) - g([X,Y],Z) - g(X,[Z,Y]) - g(Y,[X,Z]))$$

Donc la connexion riemannienne ∇ existe et unique.

Determination des symboles de Christoffel associées à la connexion riemannienne ∇ :

On a:

$$\begin{aligned} g(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_k}) &= \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x_j} g(\frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_i}) - \frac{\partial}{\partial x_k} g(\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_i}) + \frac{\partial}{\partial x_i} g(\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_k}) \\ &\quad - g([\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_k}], \frac{\partial}{\partial x_i}) - g(\frac{\partial}{\partial x_j}, [\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_k}]) - g(\frac{\partial}{\partial x_j}, [\frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_i}])) \\ &= \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ji} + \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk}). \end{aligned}$$

car $(-g([\frac{\partial}{\partial x_j},\frac{\partial}{\partial x_k}],\frac{\partial}{\partial x_i})-g(\frac{\partial}{\partial x_j},[\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial x_k}])-g(\frac{\partial}{\partial x_j},[\frac{\partial}{\partial x_k},\frac{\partial}{\partial x_i}])\ )=0$

Donc $\Gamma^l_{ij}g_{lk}=\frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x_j}g_{ki}-\frac{\partial}{\partial x_k}g_{ji}+\frac{\partial}{\partial x_i}g_{jk})\Rightarrow\Gamma^l_{ij}=\frac{1}{2}g^{-1}_{lk}.(\frac{\partial g_{ki}}{\partial x_j}-\frac{\partial g_{ji}}{\partial x_k}+\frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i})....(4)$ □

Exemple 3.1.18 *trouver les symboles de christoffel de:* $g=\sin^2\varphi(d\theta)^2+(d\varphi)^2$.

La matrice de g *s'écrit donc:* $g=\begin{pmatrix}\sin^2\varphi & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ *elle est bilinéaire symétrique, définie positive et non dégénérée.*

D'aprée le theoréme (3.1.17) (pour $x_1=\theta$ *et* $x_2=\varphi$ *) on obtient:*

$l=1$

$\Gamma^1_{11}=\frac{1}{2}g^{11}(\frac{\partial g_{11}}{\partial x_1}-\frac{\partial g_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial g_{11}}{\partial x_1})=\frac{1}{2}(\sin^2\varphi)^{-1}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin^2\varphi$

$\Gamma^1_{11}=\Gamma^1_{22}=0$

$\Gamma^1_{12}=\frac{1}{2}g^{11}(\frac{\partial g_{11}}{\partial x_2}-\frac{\partial g_{21}}{\partial x_1}+\frac{\partial g_{21}}{\partial x_1})=\frac{1}{2}(\sin^2\varphi)^{-1}\frac{\partial}{\partial\varphi}(-\sin^2\varphi)$

$\Gamma^1_{12}=\frac{1}{2}\cot\varphi$

$\Gamma^1_{21}=\Gamma^1_{12}=\frac{1}{2}\cot\varphi.$

$l=2$

$\Gamma^2_{11}=-\sin\varphi\cos\varphi.$

$\Gamma^2_{12}=\Gamma^2_{21}=\Gamma^2_{22}=0.$

La formule (1) donne $\Gamma^1_{ij}=\begin{pmatrix}0 & \cot\varphi\\ \cot\varphi & 0\end{pmatrix},\Gamma^2_{ij}=\begin{pmatrix}-\sin\varphi\cos\varphi & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$

3.1.6 Notion fondamentale en géométrie riemannienne

Définition 3.1.19 *Soit (M, g) une variété Riemannienne et ∇ la connexion de Levi-Civita.*

On appelle tenseur de courbure un champs de tenseur de type $(1, 3)$, définie par:

$$\forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M), R(X, Y)Z = [\nabla_X, \nabla_Y]Z - \nabla_{[X,Y]}Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z.$$

Remarque 3.1.20 $R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z.$

• **Expression en coordonnées locale de R:**

Soit $x \in M$ et $(x_1, x_2, ..., x_n)$ un système de coordonnées locales de x

$\forall X = X^i \partial_i, Y = Y^j \partial_j, W = W^l \partial_l$ et $Z = Z^k \partial_k$

$$\begin{aligned}
R(X, Y)Z &= R(X^i \partial_i, Y^j \partial_j) Z^k \partial_k \\
&= X^i Y^j Z^k (\nabla_{\partial_i} \nabla_{\partial_j} \partial_k - \nabla_{\partial_j} \nabla_{\partial_i} \partial_k) \\
&= X^i Y^j Z^k (\nabla_{\partial_i} \Gamma^m_{jk} \partial_m - \nabla_{\partial_j} \Gamma^m_{ik} \partial_m) \\
&= X^i Y^j Z^k (\partial_i \Gamma^m_{jk}(\partial_m)) + \Gamma^m_{jk} \Gamma^l_{im} \partial_l - \partial_j \Gamma^m_{ik}(\partial_m)) - \Gamma^m_{ik} \Gamma^l_{jm} \partial_l) \\
&= X^i Y^j Z^k [(\partial_i \Gamma^m_{jk} - \partial_j \Gamma^m_{ik}) \partial_m + (\Gamma^m_{jk} \Gamma^l_{im} - \Gamma^m_{ik} \Gamma^l_{jm}) \partial_l] \\
&= X^i Y^j Z^k [(\partial_i \Gamma^l_{jk} - \partial_j \Gamma^l_{ik} + \Gamma^m_{jk} \Gamma^l_{im} - \Gamma^m_{ik} \Gamma^l_{jm}) \partial_l] \\
&= (R^l_{kij} X^i Y^j Z^k) \partial_l, \text{ avec } R^l_{kij} = \partial_i(\Gamma^l_{jk}) - \partial_j(\Gamma^l_{ik}) + \sum_{m=1}^{n} (\Gamma^m_{jk} \Gamma^l_{im} - \Gamma^m_{ik} \Gamma^l_{jm}).
\end{aligned}$$

Exemple 3.1.21 *Méme exemple précident $g = \sin^2 \varphi (d\theta)^2 + (d\varphi)^2$.*

- *On va calcul* R^l_{ijk}, *pour* $i,j,k,l=1,2$ *telle que* $R^l_{ijk}=\partial_i(\Gamma^l_{jk})-\partial_j(\Gamma^l_{ik})+\Gamma^l_{im}\Gamma^m_{jk}-\Gamma^l_{jm}\Gamma^m_{ik}$

  Pour $l=1$

  $R^1_{111}=\partial_1(\Gamma^1_{11})-\partial_1(\Gamma^1_{11})+(\Gamma^1_{11}\Gamma^1_{11})-(\Gamma^1_{11}\Gamma^1_{11})=0\Rightarrow R^1_{111}=0$

  $R^1_{112}=\partial_1(\Gamma^1_{12})-\partial_1(\Gamma^1_{12})+(\Gamma^1_{11}\Gamma^1_{12})-(\Gamma^1_{11}\Gamma^1_{12})=0\Rightarrow R^1_{112}=0$

  $R^1_{121}=\partial_1(\Gamma^1_{21})-\partial_2(\Gamma^1_{11})+(\Gamma^1_{11}\Gamma^1_{21})-(\Gamma^1_{21}\Gamma^1_{11})=\partial_1(\frac{1}{2}(\cot\varphi))=0\Rightarrow R^1_{121}=0$

  $R^1_{122}=\partial_1(\Gamma^1_{22})-\partial_2(\Gamma^1_{12})+(\Gamma^1_{11}\Gamma^1_{22})-(\Gamma^1_{21}\Gamma^1_{12})$

  $=-\partial_2(\frac{1}{2}(\cot\varphi))-(\frac{1}{2}(\cot\varphi))^2$

  $=\frac{1}{2}(\sin^2\varphi)-(\frac{1}{2}(\cot\varphi))^2=\frac{2-\cos^2\varphi}{4\sin^2\varphi}\Rightarrow R^1_{122}=\frac{2-\cos^2\varphi}{4\sin^2\varphi}$

  $R^1_{211}=\partial_2(\Gamma^1_{11})-\partial_1(\Gamma^1_{21})+(\Gamma^1_{21}\Gamma^1_{11})-(\Gamma^1_{11}\Gamma^1_{21})=-\partial_1(\frac{1}{2}\cot\varphi)=0\Rightarrow R^1_{211}=0$

  $R^1_{212}=\partial_2(\Gamma^1_{12})-\partial_1(\Gamma^1_{22})+(\Gamma^1_{21}\Gamma^1_{12})-(\Gamma^1_{11}\Gamma^1_{22})=-R^1_{122}=\frac{-2+\cos^2\varphi}{4\sin^2\varphi}$

  $R^1_{221}=\partial_2(\Gamma^1_{21})-\partial_2(\Gamma^1_{21})+(\Gamma^1_{21}\Gamma^1_{21})-(\Gamma^1_{21}\Gamma^1_{21})=0\Rightarrow R^1_{221}=0$

  $R^1_{222}=\partial_2(\Gamma^1_{22})-\partial_2(\Gamma^1_{22})+(\Gamma^1_{21}\Gamma^1_{21})-(\Gamma^1_{21}\Gamma^1_{21})=0\Rightarrow R^1_{222}=0.$

  Pour $l=2$

  $R^2_{111}=\partial_1(\Gamma^2_{11})-\partial_1(\Gamma^2_{11})+(\Gamma^2_{11}\Gamma^1_{11})-(\Gamma^2_{11}\Gamma^1_{11})=0.\Rightarrow R^2_{111}=0.$

  $R^2_{112}=\partial_1(\Gamma^2_{12})-\partial_1(\Gamma^2_{12})+(\Gamma^2_{11}\Gamma^1_{12})-(\Gamma^2_{11}\Gamma^1_{12})=0\Rightarrow R^2_{112}=0.$

  $R^2_{121}=\partial_1(\Gamma^2_{21})-\partial_2(\Gamma^2_{11})+(\Gamma^2_{11}\Gamma^1_{21})-(\Gamma^2_{21}\Gamma^1_{11})$

  $=-\partial_2(-\sin\varphi\cos\varphi)+(-\sin\varphi\cos\varphi)(\frac{1}{2}\cot\varphi)$

  $=\cos 2\varphi\Rightarrow R^2_{121}=\cos 2\varphi.$

  $R^2_{211}=\partial_2(\Gamma^2_{11})-\partial_1(\Gamma^2_{21})+(\Gamma^2_{21}\Gamma^1_{11})-(\Gamma^2_{11}\Gamma^1_{21})$

  $=\partial_2(-\sin\varphi\cos\varphi)-(-\sin\varphi\cos\varphi)(\frac{1}{2}\cot\varphi)=-R^2_{121}\Rightarrow R^2_{211}=-\cos 2\varphi$

  $R^2_{122}=\partial_1(\Gamma^2_{22})-\partial_2(\Gamma^2_{12})+(\Gamma^2_{11}\Gamma^1_{22})-(\Gamma^2_{21}\Gamma^1_{12})=0.\Rightarrow R^2_{122}=0$

  $R^2_{212}=\partial_2(\Gamma^2_{12})-\partial_1(\Gamma^2_{22})+(\Gamma^2_{21}\Gamma^1_{12})-(\Gamma^2_{11}\Gamma^1_{22})=-R^2_{122}=0$

  $R^2_{221}=\partial_2(\Gamma^2_{21})-\partial_2(\Gamma^2_{21})+(\Gamma^2_{21}\Gamma^1_{21})-(\Gamma^2_{21}\Gamma^1_{21})=0.\Rightarrow R^2_{221}=0$

  $R^2_{222}=\partial_2(\Gamma^2_{22})-\partial_2(\Gamma^2_{22})+(\Gamma^2_{21}\Gamma^1_{22})-(\Gamma^2_{21}\Gamma^1_{22})=0.\Rightarrow R^2_{222}=0.$

Propriété 2 *1) R est bilinéaire dans $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$*

$$R(fX_1 + gX_2, Y)Z = fR(X_1, Y)Z + gR(X_2, Y)Z$$

Et

$$R(X, fY_1 + gY_2)Z = fR(X, Y_1)Z + gR(X, Y_2)Z, \forall X_1, X_2, Y_1, Y_2, Z \in \mathfrak{X}(M), \forall f, g, h \in C^\infty(M)$$

2) $\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, l'operateur $R(X, Y) : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ est linéaire.

$$R(X, Y)(Z + W) = R(X, Y)Z + R(X, Y)W.$$

3) $R(X, Y)(fZ) = fR(X, Y)Z$.

Preuve. 1) R est bilinéairé, car:

$$\begin{aligned}
R(fX_1 + gX_2, Y)Z &= \nabla_{f_{X_1+gX_2}}\nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_{f_{X_1+gX_2}} Z - \nabla_{[f_{X_1+gX_2}, Y]} Z \\
&\quad (\nabla_{fX_1} + \nabla_{gX_2})\nabla_Y Z - \nabla_Y((\nabla_{fX_1} + \nabla_{gX_2})Z - f\nabla_{[X_1,Y]}Z - g\nabla_{[X_2,Y]}Z \\
&= f(\nabla_{X_1}\nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_{X_1} Z - \nabla_{[X_1,Y]}Z) + g(\nabla_{X_2}\nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_{X_2} Z - \nabla_{[X_2,Y]}Z) \\
&= fR(X_1, Y)Z + gR(X_2, Y)Z.
\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}
R(X, Y)(Z + W) &= \nabla_X \nabla_Y (Z + W) - \nabla_Y \nabla_X (Z + W) - \nabla_{[X,Y]}(Z + W) \\
&= \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_X \nabla_Y W - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y W - \nabla_{[X,Y]}Z - \nabla_{[X,Y]}Z \\
&= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z + \nabla_X \nabla_Y W - \nabla_X \nabla_Y W - \nabla_{[X,Y]}Z \\
&= R(X, Y)Z + R(X, Y)W.
\end{aligned}$$

3) On a

$$\nabla_Y\nabla_X(fZ) = \nabla_Y(f\nabla_X Z + (Xf)Z) = f\nabla_Y\nabla_X Z + (Yf)(\nabla_X Z) + (Xf)(\nabla_Y Z) + (Y(Xf)Z).$$

Et puis que

$$\nabla_Y\nabla_X(fZ) - \nabla_X\nabla_Y(fZ) = f(\nabla_Y\nabla_X - \nabla_X\nabla_Y)Z + ((YX - XY)f)Z.$$

Alors

$$R(X,Y)(fZ) = f\nabla_X\nabla_Y Z - f\nabla_Y\nabla_X Z + ([Y,X]f)Z - f\nabla_{[X,Y]}Z + ([X,Y]f)Z = fR(X,Y)Z.$$

□

Proposition 3.1.22 $1^{ére}$ *identité de Bianchi:*

Soit (M,g) *une variété Riemannienne. Le tenseur de courbure Riemannienne* R *vérifie l'identité de Bianchi algébrique:*

$$R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0, \forall X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M).$$

Preuve. $\forall X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M)$

$$\begin{aligned}
R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y &= \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z + \nabla_Y\nabla_Z X - \nabla_Z\nabla_Y X \\
&\quad -\nabla_{[Y,Z]}X + \nabla_Z\nabla_X Y - \nabla_X\nabla_Z Y + \nabla_{[Z,X]}Y \\
&= \nabla_X(\nabla_Y Z - \nabla_Z Y) + \nabla_Y(\nabla_Z X - \nabla_X Z) \\
&\quad +\nabla_Z(\nabla_X Y - \nabla_Y X) - \nabla_{[X,Y]}Z) - \nabla_{[Y,Z]}X - \nabla_{[Z,X]}X. \\
&= \nabla_X[Y,Z] + \nabla_Y[Z,X] + \nabla_Z[X,Y] \\
&\quad -\nabla_{[Y,Z]}X - \nabla_{[Z,X]}Y - \nabla_{[X,Y]}Z \\
&= [X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0.
\end{aligned}$$

□

$2^{iéme}$ identité de Bianchi sur une variété riemannienne

$$(\nabla_X R)(Y,Z) + (\nabla_Y R)(Z,X) + (\nabla_Z R)(X,Y) = 0, \forall X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M).$$

Où

$$\nabla_X Y : \quad \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$$

$$(X,Y,Z) \mapsto (\nabla_X R)(Y,Z,W)$$

définie par:

$$((\nabla_X R)(Y,Z))(W) = \nabla_X(R(Y,Z))(W)) - (R(\nabla_X Y, Z))(W) - (R(Y, \nabla_X Z))(W) - R(Y,Z)(\nabla_X W)$$

i) $\nabla_X Y$ est $C^\infty(M)$ -trilinéaire: (evident).

Montrons la $2^{iéme}$ identité de Bianchi $(\nabla_X R)(Y,Z) + (\nabla_Y R)(Z,X) + (\nabla_Z R)(X,Y) = 0$

Preuve. On a

$$(\nabla_X R)(Y,Z)(W) = \nabla_X(R(Y,Z)(W)) - (R(\nabla_X Y, Z))(W)$$

$$-(R(Y, \nabla_X Z))(W) - R(Y,Z)(\nabla_X W)...(4)$$

$$(\nabla_Y R)(Z,X)(W) = \nabla_Y(R(Z,X))(W)) - (R(\nabla_Y Z, X))(W)$$

$$-(R(Z, \nabla_Y X))(W) - R(Z,X)(\nabla_Y W)...(5)$$

$$(\nabla_Z R)(X,Y)(W) = \nabla_Z(R(X,Y))(W)) - (R(\nabla_Z X, Y))(W))$$

$$-(R(X, \nabla_Z Y))(W) - R(X,Y)(\nabla_Z W)...(6)$$

$$(4) + (5) + (6) = \nabla_X(R(Y,Z)(W)) + \nabla_Y(R(Z,X)(W)) + \nabla_Z(R(X,Y)(W))$$

$$+R(\nabla_Y X - \nabla_X Y, Z)(W) + R(\nabla_X Z - \nabla_Z X, Y)(W)$$

$$+R(\nabla_Z Y - \nabla_Y Z, X)(W) - R(Y,Z)(\nabla_X W)$$

$$-R(Z,X)(\nabla_Y W) - R(X,Y)(\nabla_Z W).....(*)$$

$$
\begin{aligned}
* &= \nabla_X(\nabla_Y(\nabla_Z W)) - \nabla_X(\nabla_Z(\nabla_Y W)) - \nabla_X(\nabla_{[Y,Z]}W) + \nabla_Y(\nabla_Z(\nabla_X W)) \\
&\quad -\nabla_Y(\nabla_X(\nabla_Z W)) - \nabla_Y\nabla_{[Z,X]}W + \nabla_Z(\nabla_X(\nabla_Y W)) - \nabla_Z(\nabla_Y(\nabla_X W)) \\
&\quad -\nabla_Z((\nabla_{[X,Y]}W)) + R([Y,X],Z)(W) + R([X,Z],Y)(W) + R([Z,X],Y)(W) \\
&\quad -\nabla_Y(\nabla_Z(\nabla_X W)) + \nabla_Z(\nabla_Y(\nabla_X W)) + \nabla_{[Y,Z]}(\nabla_X W) - \nabla_Z(\nabla_X(\nabla_Y W)) + \nabla_X(\nabla_Z(\nabla_Y W)) \\
&\quad +\nabla_{[Z,Y]}(\nabla_Y W) - \nabla_X(\nabla_Y(\nabla_Z W)) + \nabla_Y(\nabla_X(\nabla_Z W)) + \nabla_{[X,Y]}(\nabla_Z W). \\
&= -\nabla_X(\nabla_{[Y,Z]}W) - \nabla_Y(\nabla_{[Z,X]}W) - \nabla_Z(\nabla_{[X,Y]}W) + \nabla_{[Y,X]}(\nabla_Z W) - \nabla_Z(\nabla_{[Y,X]}W) \\
&\quad -(\nabla_{[[Y,X],Z]}W) + \nabla_{[X,,Z]}(\nabla_Y W) - \nabla_Y(\nabla_{[X,Z]}W) - \nabla_{[[X,Z],Y]}W + \nabla_{[Z,Y]}(\nabla_X W) \\
&\quad -\nabla_X(\nabla_{[Z,Y]}W) - (\nabla_{[[Z,Y],X]}W) + \nabla_{[Y,,Z]}(\nabla_X W) + \nabla_{[Z,,X]}(\nabla_Y W) + \nabla_{[X,,Y]}(\nabla_Z W) \\
&= -\nabla_{[[Y,X],Z]}W - \nabla_{[[X,Z],Y]}W - \nabla_{[[Z,Y],X]}W = -\nabla_{[[Y,X],Z]+[[X,Z],Y]+[[Z,Y],X]}W = 0.
\end{aligned}
$$

Pour cette démonstration on utilise la définition de tenseur de courbure R et on faite que torsion $T = 0$ de la connexion riemannienne i.e: $\nabla_Y X - \nabla_X Y = [Y, X]$. $\square$

• **Expresion en coordonnées locale de $2^{iéme}$ identité de Bianchi**

$$
\begin{aligned}
(\nabla_X R)(Y,Z) + (\nabla_Y R)(Z,X) + (\nabla_Z R)R(X,Y) &= \Gamma^s_{jk}(\partial_i\Gamma^k_{lm}) - \Gamma^s_{lk}(\partial_i\Gamma^k_{jm}) + \Gamma^s_{lk}(\partial_j\Gamma^k_{im}) \\
&\quad -\Gamma^s_{ik}(\partial_j\Gamma^k_{lm}) + \Gamma^s_{ik}(\partial_l\Gamma^k_{jm}) - \Gamma^s_{jk}(\partial_l\Gamma^k_{lm}).
\end{aligned}
$$

• Sur la variété Riemannienne on a

$$R^s_{ilm} = \partial_j\Gamma^s_{lm} - \partial_l\Gamma^s_{jm} + \Gamma^s_{jk}\Gamma^k_{lm} - \Gamma^s_{lk}\Gamma^k_{jm}$$

Avec

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}, \partial_l = \frac{\partial}{\partial x_l}, \partial_m = \frac{\partial}{\partial x_m}$$

Et

$$\nabla_i = \nabla_{\partial_i}, \nabla_j = \nabla_{\partial_j}, \nabla_l = \nabla_{\partial_l} \text{ et } \nabla_m = \nabla_{\partial_m}.$$

Propriétés de la courbure d'une variété Riemannienne

Définition 3.1.23 *Soit* (M, g) *une variété Riemannienne.*

On définit un tenseur de type $(0, 4)$ *noté* $\widetilde{R}$ *par:*

$$\widetilde{R}(X, Y, Z, W) = g(R(X, Y)Z, W), \forall X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M).$$

Proposition 3.1.24 *Soit* (M, g) *une variété Riemannienne. Le tenseur* $\widetilde{R}$ *vérifie les propriétés suivantes :*

1) Identité de Bianchi : $\widetilde{R}(X, Y, Z, W) + \widetilde{R}(Y, Z, X, W) + \widetilde{R}(Z, X, Y, W) = 0.$

2) Anti-symétrie en (X, Y) *:* $\widetilde{R}(X, Y, Z, W) = -\widetilde{R}(Y, X, Z, W)$.

3) Anti-symétrie en (Z, W) *:* $\widetilde{R}(X, Y, Z, W) = -\widetilde{R}(Y, X, W, Z)$.

4) Symétrie dans les couples (X, Y) *et* (Z, W), $\widetilde{R}(X, Y, Z, W) = -\widetilde{R}(Z, W, X, Y)$.

Preuve. 1)

$$\begin{aligned}
\widetilde{R}(X, Y, Z, W) + \widetilde{R}(Y, Z, X, W) + \widetilde{R}(Z, X, Y, W) &= g(R(X, Y)Z, W)) + g(R(Y, Z)X, W)) \\
&\quad + g(R(Z, X)Y, W)) \\
&= g(R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y, W) = 0
\end{aligned}$$

2) $\widetilde{R}(X, Y, Z, W) = g(R(X, Y)Z, W)) = g(-R(Y, X)Z, W)) = -\widetilde{R}(Y, X, Z, W)$.

3) $\Leftrightarrow \widetilde{R}(X, Y, Z, Z) = 0.$

$\Rightarrow$) $\widetilde{R}(X, Y, Z, Z) = 0$, nous avons

$$\widetilde{R}(X, Y, Z + W, Z + W) = 0 \Leftrightarrow \widetilde{R}(X, Y, Z, W) + \widetilde{R}(X, Y, W, Z) = 0.$$

$\Leftarrow$) En utilisant le fait que la connexion de Levi-Civita est compatible avec le métrique, nous avons $X.g(\nabla_Y Z, Z) = g(\nabla_X \nabla_Y Z, Z) + g(\nabla_Y Z, \nabla_X Z)$ et $[X,Y].g(Z,Z) = 2g(\nabla_{[X,Y]} Z, Z)$

$$\begin{aligned}
\widetilde{R}(X,Y,Z,Z) &= g(R(X,Y)Z,Z)) \\
&= g(\nabla_X \nabla_Y Z, Z) - g(\nabla_Y \nabla_X Z, Z) - g(\nabla_{[X,Y]} Z, Z) \\
&= X.g(\nabla_Y Z, Z) - g(\nabla_Y Z, \nabla_X Z) - Y.g(\nabla_X Z, Z) + g(\nabla_X Z, \nabla_Y Z) - \frac{1}{2}[X,Y].g(Z,Z) \\
&= \frac{1}{2}X.(Y.g(Z,Z)) - \frac{1}{2}Y.(X.g(Z,Z)) - \frac{1}{2}[X,Y].g(Z,Z) \\
&= \frac{1}{2}[X,Y].g(Z,Z) - \frac{1}{2}[X,Y].g(Z,Z) = 0.
\end{aligned}$$

4) d'aprés (1) on obtient

$$\begin{aligned}
\widetilde{R}(X,Y,Z,W) + \widetilde{R}(Y,Z,X,W) + \widetilde{R}(Z,X,Y,W) &= 0 \\
\widetilde{R}(Y,Z,W,X) + \widetilde{R}(Z,W,Y,X) + \widetilde{R}(W,Y,Z,X) &= 0 \\
\widetilde{R}(Z,W,X,Y) + \widetilde{R}(W,X,Z,Y) + \widetilde{R}(X,Z,W,Y) &= 0 \\
\widetilde{R}(W,X,Y,Z) + \widetilde{R}(X,Y,W,Z) + \widetilde{R}(Y,W,X,Z) &= 0
\end{aligned}$$

En ajoutant ceux-ci et en utilisant (3), nous avons

$$\widetilde{R}(Z,X,Y,W) + \widetilde{R}(W,Y,Z,X) + \widetilde{R}(X,Z,W,Y) + \widetilde{R}(Y,W,X,Z) = 0.$$

D'aprés (2) et (3) on obtient

$$2\widetilde{R}(Z,X,Y,W) - 2\widetilde{R}(Y,W,Z,X) = 0.$$

$\square$

- **Expression en coordonnées locale de $\widetilde{R}$:**

$$\begin{aligned}
\widetilde{R}(X,Y,Z,W) &= g(R(X,Y)Z,W) \\
&= g((R^l_{ijk}X^iY^jZ^k)\partial_l, W^m\partial_m) = R^l_{ijk}X^iY^jZ^kW^m g(\partial_l,\partial_m) \\
&= R^l_{ijk}X^iY^jZ^kW^m g_{lm} = X^iY^jZ^kW^m R_{ijkl}, \text{avec } R_{kijl} = R^l_{ijk}g_{lm}.
\end{aligned}$$

Chapitre 4

Opérateurs sur une variété Riemannienne

Dans ce paragraphe on introduit les isomorphisme diése et bemol, divergence d'un tenseur sur une variété Riemannienne, Laplacien des fonctions différentiable, divergence sur ces champs de vecteur et quelques propriétés, voir [10], [13], [15].

4.1 Les isomorphismes canoniques

4.1.1 Isomorphisme bemol b et diése $\#$

Définition 4.1.1 *Soit (M, g) une variété Riemannienne, et $\forall x \in M, g_x$ est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur T_xM, alors on peut identifier T_xM et T_x^*M par L'isomorphisme:*

$$\begin{aligned} \#_x : \quad & T_x^*M \to T_xM \\ & w_x \mapsto \#_x(w_x) \end{aligned}$$

tel que pour:

$$w_x : \quad T_xM \to \mathbb{R}$$

$$Y_x \mapsto w_x(Y_x)$$

$g(\#_x(w_x), Y_x) = w_x(Y_x), \forall Y_x \in T_xM$

Et

$$g_x(\#_x(b_x(X_x)), Y_x) = (b_x(X_x))(Y_x) = g_x(X_x, Y_x).$$

Donc

$$\#_x(b_x(X_x)) = X_x, \forall X_x \in T_xM$$

Ainsi: $\#_x \circ b_x = Id_{T_xM}$.

1) $b_x \circ \#_x = Id_{T_x^*M}$.

En effet:

$$b_x \circ \#_x : \quad T_x^*M \to T_x^*M$$

$$w_x \mapsto (b_x \circ \#_x)(w_x)$$

Et $(b_x \circ \#_x)(w_x) : T_xM \to \mathbb{R}$ défini par:

$$\begin{aligned} Y_x((b_x \circ \#_x)(w_x))(Y_x) &= g_x(\#_x(w_x), Y_x) \\ &= w_x(Y_x), \forall w_x \in T_x^*M, \forall Y_x \in T_xM. \end{aligned}$$

Alors $b_x \circ \#_x = Id_{T_x^*M}$.

2) b_x est linéaire:

$$b_x : \quad T_xM \to T_x^*M$$

$$X_x \mapsto b_x(X_x)$$

Et $b_x(X_x) : T_xM \to \mathbb{R}$ défini par: $(b_x(X_x))(Y_x) = g_x(X_x, Y_x)$.

i) Soient $X_x, Y_x, Z_x \in T_xM$.

$$\begin{aligned}(b_x \circ (X_x + Y_x))(Z_x) &= g_x(X_x + Y_x, Z_x) \\ &= g_x(X_x, Z_x) + g_x(Y_x, Z_x) \\ &= (b_x(X_x))(Z_x) + (b_x(Y_x))(Z_x) \\ &= (b_x(X_x) + b_x(Y_x))(Z_x)\end{aligned}$$

ii) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}b_x(\alpha w_x)(Y_x) &= g_x(\alpha w_x, Y_x) \\ &= \alpha g_x(w_x, Y_x), \forall Y_x \in T_xM \\ &= \alpha(b_x(w_x))(Y_x), \forall Y_x \in T_xM \\ &= (\alpha b_x(w_x))(Y_x), \forall Y_x \in T_xM\end{aligned}$$

Donc $b_x(\alpha w_x) = \alpha b_x(w_x)$.

D'ou b_x est linéaire.

3) $\#_x$ est linéaire:

$$\begin{aligned}\#_x : \quad & T_x^*M \to T_xM \\ & w_x \mapsto \#_x(w_x)\end{aligned}$$

i) Soient $w_x, w'_x \in T^*_x M$.

$$\begin{aligned} g_x(\#_x(w_x + w'_x), Y_x) &= (w_x + w'_x)(Y_x), \forall Y_x \in T_x M \\ &= w_x(Y_x) + w'_x(Y_x), \forall Y_x \in T_x M \\ &= g_x(\#_x(w_x), Y_x) + g_x(\#_x(w'_x), Y_x) \\ &= g_x(\#_x(w_x) + \#_x(w'_x), Y_x) \end{aligned}$$

D'ou $g_x(\#_x(w_x + w'_x), Y_x) - g_x(\#_x(w_x + w'_x), Y_x) = 0, \forall Y_x \in T_x M$.

$g_x(\#_x(w_x + w'_x) - \#_x(w_x) - \#_x(w'_x), Y_x) = 0, \forall Y_x \in T_x M$.

Comme g_x non degénérée donc $\#_x(w_x + w'_x) = \#_x(w_x) + \#_x(w'_x)$.

ii) De méme pour montrer que $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall w_x \in T^*_x M$

$\#_x(\alpha w_x) = \alpha \#_x(w_x)$.

D'ou $\#_x$ est linéaire.

• **Expression en coordonnées locales de $\#_x$ et b_x:**

$$\begin{aligned} \#_x : \quad & T^*_x M \to T_x M \\ & w_x \mapsto \#_x(w_x) \end{aligned}$$

telle que $g_x(\#_x(w_x), Y_x) = w_x(Y_x), \forall Y_x \in T_x M$.

• Soit $(U, \varphi) \in A(M)$, soit $x \in U$

$$\begin{aligned} w_x &= w_i(x)dx^i \in T_x^*M \\ Y_x &= Y_x^j \frac{\partial}{\partial x_j} \\ w_x(Y_x) &= (w_i(x)dx^i)(Y_x^j \frac{\partial}{\partial x_j}) \\ &= w_i(x)Y_x^j \delta_j^i \\ &= w_i(x)Y_x^i. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \#_x(w_x) &= (\#_x(w_x))^i \frac{\partial}{\partial x_i} \\ g_x((\#_x(w_x))^i \frac{\partial}{\partial x_i}, Y_x^j \frac{\partial}{\partial x_j}) &= w_l(x)Y_x^l, \forall Y \in T_xM. \\ g_{ij}(x)(\#_x(w_x)^i \delta_m^j) &= w_l(x)\delta_m^l \\ g_{im}(x)(\#_x(w_x))^i &= w_m(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g^{ms}(x)g_{im}(x)(\#_x(w_x))^i &= g_x^{ms}w_m(x) \\ \delta_i^s((\#_x(w_x))^i &= g_x^{ms}w_m(x) \end{aligned}$$

$\Rightarrow (\#_x(w_x))^s = g_x^{ms}w_m(x)$, donc $\#_x(w_x) = g_x^{ms}w_m(x)\frac{\partial}{\partial x_i}$.

De méme pour $b_x(X_x)$:

$$\begin{aligned} X_x &= X^i \frac{\partial}{\partial x_i}, Y_x = Y^j \frac{\partial}{\partial x_j} \\ (b_x(X_x)) &= (b_x(X_x))_l dx^l \\ (b_x(X_x))(Y_x) &= (b_x(X_x))_l Y_x^l. \\ g_x(X^i \frac{\partial}{\partial x_i}, Y^j \frac{\partial}{\partial x_j}) &= g_{ij}(x)X_x^i Y_x^j \end{aligned}$$

Alors:

$$b_x(X_x) = g_{ij}X_x^i dx^i.$$

4.1.2 L'opérateur gradient sur une variété Riemannienne

Soit $f \in C^\infty(M)$ i.e:

$$f : \quad M \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x)$$

$$d_x f : T_x M \to T_{f(x)}\mathbb{R} \simeq \mathbb{R} : \text{forme linéaire sur } T_x M$$

défini par: $X_x \mapsto (d_x f)(X_x)$. c'est -à -dire $d_x f = (\frac{\partial}{\partial x_i}(f))(x) dx_i$.

Définition 4.1.2 *On appelle gradient de f noté* $\mathrm{grad}(f)$ *le champ de vecteur sur M défini par:* $\mathrm{grad}(f) = \#(df)$ *c'est-à-dire*

$$\forall x \in M, (\mathrm{grad}(f))(x) = (\#(df))(x) = \#_x(d_x f).$$

• **Expression en coordonneé locale de grad:**

$$\begin{aligned}
(\mathrm{grad}\, f)(x) &= (\mathrm{grad}\, f)^j(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \\
(\mathrm{grad}\, f)^j(x) &= (\#_x(d_x f))^j \\
&= g_x^{jm} \frac{\partial}{\partial x_m} f(x) \\
\mathrm{grad}\, f &= (g^{jm} \frac{\partial}{\partial x_m}) \frac{\partial}{\partial x_i}
\end{aligned}$$

• grad est linéaire

i) $\forall f, g \in C^\infty(M), \mathrm{grad}(f+g) = \mathrm{grad}(f) + \mathrm{grad}(g)$.

i.e $\forall x \in M$, $\mathrm{grad}(f+g)(x) = \mathrm{grad}(f)(x) + \mathrm{grad}(g)(x)$.

ii) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall f \in C^\infty(M) : \mathrm{grad}(\alpha f) = \alpha\, \mathrm{grad}(f)$ i.e $\forall x \in M$, $\mathrm{grad}(\alpha f)(x) = \alpha\, \mathrm{grad}(f)(x)$.

4.1.3 L'opérateur Divergence sur les champs de vecteur

Définition 4.1.3 *Soit (M, g) une variété riemannienne.*

On appelle divergence sur un champ de vecteur X_x ($X_x \in \mathfrak{X}(M)$) noté $\operatorname{div}(X_x)$ une fonction sur M définie par $\operatorname{div}(X_x) = trace\ \nabla X_x$.

Proposition 4.1.4 *Première expression locale de la divergence*

Soit (M, g) une variété Riemannienne, alors:

$$\operatorname{div} X_x = (\frac{\partial X_x^i}{\partial x_i} + X_x^j \Gamma_{ij}^i).$$

Avec $X_x = X^i \frac{\partial}{\partial x_i} \in T_x M$.

Preuve. Sur une carte locale sur M, nous avons: $X_x = X_x^i \frac{\partial}{\partial x_i}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}$. alors:

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} X_x &= dx_i(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} X_x) \\
&= dx_i(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} X_x^j \frac{\partial}{\partial x_j}) \\
&= dx_i(\frac{\partial X_x^j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} + X_x^j \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}) \\
&= (\frac{\partial X_x^i}{\partial x_i} + X_x^j \Gamma_{ij}^i).
\end{aligned}$$

□

Propriété 3 *Soit (M, g) une variété Riemannienne, alors:*

1) $\operatorname{div}(X_x + Y_x) = \operatorname{div} X_x + \operatorname{div} Y_x$

2) $\operatorname{div}(\alpha X_x) = \alpha \operatorname{div} X_x, \forall X, Y \in T_x M$ *et* $\alpha \in \mathbb{R}$.

Preuve. On applique la définition du divergence, on a:

1)

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(X_x + Y_x) &= dx_i(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}(X_x + Y_x)) \\
&= dx_i(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}(X_x)) + dx_i(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}(Y_x)) \\
&= \operatorname{div} X_x + \operatorname{div} Y_x.
\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\alpha X_x) &= dx_i(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}(\alpha X_x)) \\
&= dx_i(\frac{\partial}{\partial x_i} X_x(\alpha) + \alpha(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}(X_\alpha))) \\
&= dx_i \frac{\partial}{\partial x_i} X_x(\alpha) + \alpha dx_i(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}(X_x)) \\
&= X_x(\alpha) + \alpha \operatorname{div} X_x \\
&= \alpha \operatorname{div} X_x.
\end{aligned}$$

□

Lemme 4.1.5 *Deuxième expression locale de la divergence*

Soit (M, g) une variété Riemannienne, alors localement on a:

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(\sqrt{\det(g_{ij})}) = \sqrt{\det(g_{ij})}\Gamma^l_{lk}.$$

Proposition 4.1.6 *Soit (M, g) une variété Riemannienne, alors:*

$$\operatorname{div} X_x = \frac{1}{\sqrt{\det(g_{ij})}} \frac{\partial}{\partial x_k}(\sqrt{\det(g_{ij})} X^k_x), \forall X \in T_x M.$$

Preuve. D'après la proposition (4.1.5), on a:

$$\operatorname{div} X_x = \frac{\partial X^i_x}{\partial x_i} + X^j_x \Gamma^i_{ij}$$

En utilisant le Lemme (4.1.6) on obtient:

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} X_x &= \frac{1}{\sqrt{\det g_{ij}}}(\sqrt{\det g_{ij}}\frac{\partial X_x^i}{\partial x_i} + X_x^j\sqrt{\det g_{ij}}\Gamma_{ij}^i) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\det g_{ij}}}(\sqrt{\det g_{ij}}\frac{\partial X_x^i}{\partial x_i} + X_x^j\frac{\partial}{\partial x_j}\sqrt{\det g_{ij}}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\det g_{ij}}}(\frac{\partial}{\partial x_i}\sqrt{\det g_{ij}}X_x^i).
\end{aligned}$$

En utilisant la convention d'einstein, on déduit que:

$$\operatorname{div} X_x = \frac{1}{\sqrt{\det g_{ij}}}(\frac{\partial}{\partial x_i}\sqrt{\det g_{ij}}X_x^i).$$

□

4.1.4 L'opérateur Laplacien sur une variété Riemannienne

Définition 4.1.7 *Soit (M, g) une variété Riemannienne, on définit l'opérateur laplacien noté Δ, sur M par:*

$$\begin{aligned}
\Delta \quad &: \quad C^\infty(M) \to C^\infty(M) \\
f \quad &\mapsto \quad \Delta(f) = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f)
\end{aligned}$$

Propriété 4 *Soit (M, g) une variété Riemannienne, alors:*

1) $\Delta(f + h) = \Delta(f) + \Delta(h)$

2) $\operatorname{div}(h \operatorname{grad}(f)) = h\Delta f + g(\operatorname{grad} h, \operatorname{grad} f)$

3) $\Delta(f.h) = h\Delta(f) + f\Delta(h) + 2g(\operatorname{grad} f; \operatorname{grad} h), \forall f, h \in C^\infty(M)$.

Preuve. 1) Soit $f, h \in C^\infty(M)$, en utilisant les propriétés des opérateurs grad et div et le fait que $X_x(f) = g(\operatorname{grad} f, X_x)$, on obtient:

$$\begin{aligned}
\Delta(f+h) &= \operatorname{div}(\operatorname{grad}(f+h)) \\
&= \operatorname{div}(\operatorname{grad} f + \operatorname{grad} h) \\
&= \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) + \operatorname{div}(\operatorname{grad} h) \\
&= \Delta(f) + \Delta(h).
\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(h \operatorname{grad}(f)) &= h \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) + (\operatorname{grad} f)(h) \\
&= h\Delta f + g(\operatorname{grad} h, \operatorname{grad} f)
\end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned}
\Delta(fh) &= \operatorname{div}(\operatorname{grad}(fh)) \\
&= \operatorname{div}(f \operatorname{grad} h + h \operatorname{grad} f) \\
&= \operatorname{div}(f \operatorname{grad} h) + \operatorname{div}(h \operatorname{grad} f) \\
&= f \operatorname{div}(\operatorname{grad} h) + (\operatorname{grad} h)(f) + h \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) + (\operatorname{grad} f)(h) \\
&= f\Delta(h) + h\Delta(f) + 2g(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} h).
\end{aligned}$$

$\square$

Proposition 4.1.8 *Première expression locale de Laplacien*

Soit (M, g) une variété Riemannienne, alors:

$$\Delta(f) = g^{ij}(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x_k}), \forall f \in C^\infty(M).$$

Preuve. Soit $f \in C^\infty(M)$, alors

$$\begin{aligned}
\Delta(f) &= \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) \\
&= g^{ij} g(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \operatorname{grad} f, \frac{\partial}{\partial x_j}) \\
&= g^{ij}(\frac{\partial}{\partial x_i} g(\operatorname{grad} f, \frac{\partial}{\partial x_j}) - g(\operatorname{grad} f, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j})) \\
&= g^{ij}(\frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{\partial f}{\partial x_j}) - \Gamma_{ij}^k (\operatorname{grad} f, \frac{\partial}{\partial x_k})) \\
&= g^{ij}(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x_k}).
\end{aligned}$$

□

Proposition 4.1.9 *deuxiéme expression locale de Laplacien*

Soit (M, g) une variété Riemannienne et $f \in C^\infty(M)$, alors:

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{\det(g_{ij})}} \frac{\partial}{\partial x_i}(\sqrt{\det(g_{ij)}} \frac{\partial f}{\partial x_j})$$

La preuve découle directement de la proposition (4.1.9).

Exemple 4.1.10 $\mathbb{R}^n$ *muni de la métrique euclidienne.*

Si $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n), \forall X_x = (X_{x_1}^1, ..., X_{x_n}^n) \in T_x\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}$

Alors:

$$\operatorname{grad}(f) = (\tfrac{\partial}{\partial x_1}, ..., \tfrac{\partial}{\partial x_n}) \in T_x M$$

$\mathrm{div}(X_x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial X_x^i}{\partial x_i}$

$\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$

Exemple 4.1.11 *Soient S^2 la sphére muni de la métrique $g_{S^2} = \sin^2\varphi(d\theta)^2 + (d\varphi)^2$ en coordonnées sphériques et $f : S^2 \to \mathbb{R}$ une application de classe C^∞, on a:*

$$\begin{aligned} g_{11} &= \sin^2\varphi, g_{12} = g_{21} = 0, g_{22} = 1 \\ \Gamma_{11}^1 &= \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{22}^2 = 0, \Gamma_{22}^1 = -\cos\theta\sin\theta \end{aligned}$$

En utilisant la formule de la proposition (4.1.9) on obtient:

$$\begin{aligned} \Delta(f) &= g^{ij}(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x_k}) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\sin^2\varphi}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{1}{2}\sin 2\varphi \frac{\partial f}{\partial \theta}. \end{aligned}$$

4.2 Conclusion et perspectives

A trauvers ce travail, nous avons quelques bases sur les variété différentielle ainsi que la métrique dans variété différentiable en chaque point qui est appelée une variété Riemannie et l'opérateurs sur la derniére variété .

Donc dans le futur, on s'intéresse par une variété semi-Riemannienne aussi appelée variété pseudo- Riemannienne, est une généralisation d'une variété Riemannienne.

La seule différence avec la variété Riemannienne est le fait que la métrique n'est pas plus une métrique définie positive.

REFERENCES

[1] A. AWANE. Géométrie différentielle, DESA Casablanca (2002).

[2] A. Frabetti. Géométrie différentielle appliquée à la physique, CNRS UMR 5028,Université Lyon 1, 21 avenue claude Benard, 69622 villeurbanne,France

[3] A. Mohammed Cherif, Géométrie semi-Riemannienne, université de Mascara,B.p 763, Route de Mamounia, 29000. Mascara.

[4] E .Aubry, Géométrie différentielle (2011).

[5] E. Aubry, Introduction à la géométrie riemannienne (2008).

[6] E. Aubry, Rappels de la topologie pour la licence.

[7] F. Jean. AOT 13. Géométrie Différentielle et Application au Controle Géométrique, edition (2012).

[8] J. Feydy. Introduction à la Géométrie Riemannienne par l'étude des espaces de formes.

[9] J. Marie Monier. Analyse Pc.PSI.PT.

[10] L. Godinho, J.Natàrio, An Introduction to Riemannian Geometry with Applications, Lisbon 2004.

[11] L. MEZIANI, Introduction à l'analyse mathématique.

[12] Mohamed Amine BAHAYOU, Introduction à la Géométrie Différentielle. Université de Ouargla,B.P 320 Bieni-Isguen.

[13] O' Neil, Semi-Riemannian Geometry, Academic Press,New York,1983.

[14] P. Pansu, Chaiptre 3:connexion de Levi-Civita, July-12-2005.

[15] S. Gudmundsson, An Introduction to Riemannian Geometry, Lund Universitye 2001.