

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Ahmed Draia Adrar
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département des Mathématiques et Informatique



MÉMOIRE

Pour l'obtention du diplôme de

MASTER

En Mathématiques

Spécialité :

Analyse Fonctionnelle et Applications

Présenté par

SENOUSSI ASMA

Thème

Quelques modèles mathématiques de deux populations en interaction

Soutenu le 15 /10/2020

devant le jury composé de :

M. FATMI Larbi	Maître de conférence B	Université d'Adrar	Président
M. RAHMAN Mabrouk	Maître de conférence B	Université d'Adrar	Rapporteur
M. KEDDI Ahmed	Maître de conférence B	Université d'Adrar	Examineur

2019–2020

Dédicace

Je me rapproche de cette oeuvre auprès de Dieu le tout-miséricordieux, le tout-puissant, et je le remercie pour la bénédiction et la grâce de l'Islam et de sa sollicitude et surtout pour son soutien et sa présence là où je vais, toujours près de moi Merci mon seigneur.

Je dédie ce modeste travail :

A la personne la plus cher au monde, mon exemple éternel, mon soutien moral et source de joie et de bonheur, celui qui s'est toujours sacrifié pour me voir réussir, pour toi mon père. A la lumière de mes jours, la source de mes efforts, la flamme de mon coeur, ma vie et mon bonheur, maman que j'adore.

A mes très chers frères : IBRAHIM, KHALED, OMAR, et mes chères soeurs : FATIMA, HAFSA, HAJAR, KAWTAR, KHADIJA .

L'amour de mon coeur : SAFAA .

A Granules de mon âme, mes chères amis : R.Fadila, B. MINOCHA, C.FATIMA, B.SOLAF, A. ASMAA, A.MARYAM, M. KHADIJA .

Toutes mes chères proches et la famille SENOUSSI, AISSAUI, BEN HIHIDI .

A ma Collègue qui étaient du soutien : B.FATIHA .

A des professeurs qui m'ont appris tout au long de ma carrière universitaire .

Je remercie à toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce modeste travail.

Enfin, Aux personnes qui m'ont toujours aidé et encouragé, qui étaient toujours à mes côtés, et à tous ceux qui m'aiment .

ASMA

Remerciements

A **Dieu le tout puissant** , qui nous a toujours soutenu dans notre parcours scolaire et dans toute notre vie, à lui soit la gloire.

A mon cher maitre et l'encadreur **M. RAHMANE Mebrouk**, qui s'est toujours montré à l'écoute et très disponible tout au long de la réalisation de ce mémoire, ainsi pour l'inspiration, l'aide et le temps qui il a bien voulu me consacrer avec sa patience, ses motivations et les informations complémentaires, ses conseils, et qui sans ce de dernier, ce travail n'aurait jamais vu le jour.

Je remercie également, **M. FATMI Larabi** et **M. KEDDI Ahmed**, pour avoir aimablement accepté de faire partie de mon jury de ce mémoire.

Je porte à exprimer sincères remerciement à tous les enseignants qui m'ont formé durant toute notre carrière.

Je n'oublie pas mes parents, frères et soeurs et tout mes amis, mes proches pour leur contribution, leur soutien et leur encouragement durant notre carrière universitaire.

Résumé :

L'objectif de ce mémoire est d'étudier la description qualitative du comportement des systèmes différentiels pour quelques modèles mathématiques de deux populations en interaction précisément la stabilité des points d'équilibre par une bonne utilisation de la **méthode directe de Lyapunov** qui se propose une résultat efficace inhabituelle, elle est réparti en trois chapitres.

Dans le premier chapitre nous rappelons quelques définitions et notions de base telles que les notions de stabilité, la théorie de Lyapunov, et nous donnons quelques propositions et lemmes et théorèmes fondamentaux.

Le deuxième chapitre est consacré à la description du modèle mathématique proie-prédateur de Lotka-Volterra avec l'étude du comportement au voisinage d'un point d'équilibre ainsi que l'étude globale des solutions.

Le troisième chapitre est destiné à l'étude de quelques modèles mathématiques de deux espèces avec l'utilisation de méthode directe de Lyapunov pour la stabilité.

Nous obtenons des conditions suffisantes pour l'existence d'un équilibre stable ou instable.

Table des matières

Introduction	3
1 Préliminaires	6
1.1 Problèmes d'existence	6
1.2 Rappelles des résultats classiques	6
1.2.1 Existence et unicité des solutions	7
1.3 Stabilité et bornitude des solutions	9
1.4 Cas non-linéaire : Méthode de linéarisation	10
1.5 Théorie de Lyapunov	11
1.6 Points critiques et extremums libres	13
2 Le système proie-prédateur de Lotka Volterra	14
2.1 Description des variables	14
2.2 Mise en équation	15
2.3 Application au système de Lotka Volterra	17
2.4 Comportement au voisinage d'un point d'équilibre	20
2.4.1 Périodicité des solutions	25
2.5 Moyenne sur une période	28
3 Quelques modèles mathématiques de deux espèces	32
3.1 Modèle logistique	32
3.2 Signification fonctionnelle du prédateur	35

3.3	Modèle de Lotka-Volterra avec réponse fonctionnelle de Holling de type II .	37
3.4	Modèle logistique de Lotka-Volterra dans le cas d'une réponse fonctionnelle de Holling type II	39
3.5	Modèle logistique de Lotka-Volterra dans le cas d'une réponse fonctionnelle de Holling type III	42
3.6	Modèle classique de mutualisme interspécifique	45
4	conclusion et Perspectives	49
	Bibliographie	50

Introduction

Les mathématiques ont des relations privilégiées, sans équivalent du côté des autres disciplines scientifiques, telles que la chimie et la biologie par l'utilisation de ces domaines comme les équations différentielles. Elles sont étudiées depuis l'invention du calcul différentiel par Newton en 1671. La description mathématique de plusieurs systèmes conduit à des équations ou systèmes différentielles pour lesquels il convient de rechercher les solutions stationnaires ou périodiques et d'étudier leurs propriétés de stabilité. Ces équations différentielles sont présentées par des modèles mathématiques qui ont été développées depuis 2000 ans.

Dans ce mémoire, nous avons étudiés quelques modèles mathématiques de deux populations en interaction qui s'appelle aussi modèles proie-prédateur ou modèles de simulation, ces modèles permettent de prendre en compte chaque individu d'une population et de simuler son comportement et son interaction avec les autres individus en tenant compte des conditions environnantes .

L'étude des populations a été introduite en 1869 et nommée "écologie" par le biologiste Ernst Haeckel. Ce terme est dérivé des termes grecs oikos, qui signifie maison et logos, qui signifie l'étude. En suivant la définition de Begon, l'écologie peut être définie par l'étude scientifique de la distribution et de l'abondance des organismes, et par l'étude des interactions qui déterminent leur distribution et leur abondance. Donc un des objectifs les plus importants de l'écologie est de comprendre les interactions qui existent entre les différents éléments vivants .

Le type de répartition le plus fréquent dans l'écologie est la contagieuse, c'est donné par

groupes :

La densité : c'est le nombre d'individus d'une espèce donnée par unité de surface. On peut la mesurer par comptage direct des individus ou l'évaluer par comptage indirect (terriers lapins) sur toute la surface ou par échantillonnage sur une portion de celle-ci.

La croissance : c'est la variation numérique par unité de temps des individus au sein de la population. Elle dépend essentiellement de la natalité et de mortalité, mais aussi de l'émigration.

Dans cadre de dynamique de populations, ces modèles reposent sur les hypothèses suivants :

1. En l'absence de prédateurs, l'effectif de la population de proies croît de manière exponentielle (dynamique malthusienne).
2. En l'absence de proies, l'effectif de la population de prédateurs décroît de manière exponentielle (le taux de morts est proportionnel à l'effectif).
3. Le taux de disparition des proies est proportionnel au nombre de rencontres entre une proie et un prédateur, que l'on suppose lui-même proportionnel au produit des effectifs des deux populations.
4. Le taux de croissance des prédateurs est également proportionnel au nombre de rencontres entre une proie et un prédateur.

Le modèle mathématique qui est au centre de notre étude est le modèle proie-prédateur de **Lotka-Volterra** a été imaginé par Vito Volterra (1860-1940) en 1925 pour modéliser l'évolution des sardines et des requins dans la mer Adriatique, il remarque que juste après la première guerre mondiale la proportion de requins et autres prédateurs impropres à la consommation que l'on pêchait parmi les poissons consommables était nettement supérieure à ce qu'elle était avant guerre et à ce qu'elle redevint ensuite. Volterra commença alors une étude des modèles analytiques qui rendent compte des observations. Le modèle similaire de ce modèle a été développé par Alfred Lotka (1880-1949). Les deux mathématiciens Alfred Lotka et Vito Volterra proposent indépendamment un modèle particulier

de dynamique des populations. Ce modèle consiste en un couple d'équations différentielles décrivant l'évolution au cours du temps de deux populations : les proies (antilopes par exemple) et les prédateurs (lions). Les lions se nourrissent des antilopes. Leur population va donc augmenter jusqu'au moment où la population d'antilopes ne sera plus suffisante pour nourrir les lions, leur population diminuera donc. Plus tard, en 1838, le mathématicien Belge Pierre-François Verhulst publia un article dans lequel il introduisit (avec des notations différentes) l'équation logistique désormais bien connue pour la croissance d'une population.

Pour l'étude de la stabilité des systèmes différentiels lequel modélisés les modèles mathématiques de deux populations, nous avons choisi fréquemment dans notre mémoire la méthode directe de **Lyapunov**. Au 19^{ème} siècle, le célèbre Alexander Mikhailovich Lyapunov a été le premier qui a avoir formulé mathématiquement les formes de stabilité, la stabilité asymptotique et exponentielle. Lyapunov a montré que l'existence de certaines fonctions, définie positive, prouvait la stabilité pour les équations différentielles ordinaires continues. Pour permettre d'étudier analytiquement le problème de stabilité d'un point d'équilibre, Lyapunov a généralisé la notion d'énergie en regardant l'évolution de cette dernière. La méthode de Lyapunov, consiste à étudier la stabilité du système sans connaître la solution explicite du système étudié. En effet, la procédure de base est de générer une fonction "de type énergie" dite fonction de Lyapunov pour le système dynamique et d'en examiner sa dérivée temporelle le long de ces trajectoire. Ce qui traduit physiquement l'idée que si l'énergie totale du système est dissipée de manière continue alors le système devra rejoindre un point d'équilibre dans un temps infini (stabilité asymptotique) ou dans un temps fini (stabilité en temps fini)[4][3].

Préliminaires

Dans ce chapitre, on introduit des définitions, notations, propositions et théorèmes et des résultats classiques concernant les systèmes différentiels non autonomes et la théorie de stabilité et bornitude. Pour les démonstrations, voir par exemple [5] et [6].

1.1 Problèmes d'existence

on rappelle dans ce paragraphe les résultats classiques sur l'existence de solutions pour les systèmes différentiels non autonomes.

1.2 Rappelles des résultats classiques

Définition 1.1. Soit l'équation différentielle :

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t)) \tag{1.1}$$

où $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est de classe C^1 .

1. On dit que le système (1.1) est autonome si la fonction f ne dépend que de la variable x . Sinon , il est non autonome.

Définition 1.2. Soient $I \times \Omega$ un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$), considérons le système différentiel (1.2) :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) , t \in I \\ (t_0, x(t_0)) = x_0. \end{cases} \quad (1.2)$$

où $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue, et $u_0 \in \Omega$.

1. La fonction x est dite solution du système (1.2) sur l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$ si elle est définie et continûment dérivable sur I , et $(t, x(t)) \in \Omega$ pour tout $t \in I$, et x satisfait la relation (1.2).
2. On appelle courbe intégrale l'ensemble : $\Gamma = \{(t, x(t)) \in \mathbb{R}^{n+1} / t \in I\}$.
3. On appelle orbite ou trajectoire l'ensemble des points $(x(t))$ où t parcourt I .
C'est l'ensemble : $\{x(t) / t \in I\}$.

Corollaire : Deux trajectoires distinctes sont disjointes.

Définition 1.3. 1. On appelle solution locale le couple (I_0, x) où $I_0 \subset I$ est un intervalle et x est une solution de (1.2) pour tout $t \in I_0$

2. On dit que la solution locale (J, y) est un prolongement de la solution locale (I_0, x) si elle vérifie : $I_0 \subseteq J$ et $\forall t \in I_0 : x(t) = y(t)$
- Si $I_0 \neq J$, on dit que (J, y) est un prolongement strict de (I_0, x)
3. On dit que la solution (I_0, x) est une solution globale de (1.2), si (I_0, x) est une solution locale de (1.2) et $I_0 = I$
4. On dit que la solution (I, x) est une solution maximale si elle n'a pas de prolongement à un intervalle J strictement plus grand de I i.e $(J \not\supseteq I)$

1.2.1 Existence et unicité des solutions

Théorème 1.1 (Existence). Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue. Pour tout $(t_0, x_0) \in \Omega$, le système (1.2) admet au moins une solution.

Définition 1.4. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue. On dit que $f = f(t, x)$ est k -lipschitzienne en x si

$$\forall (t, x_1), (t, x_2) \in \Omega, \|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq k \|x_1 - x_2\|,$$

(k ne dépend pas de t).

f est dite localement lipschitzienne en x si $\forall (t_0, x_0) \in \Omega$, il existe un voisinage $V(t_0, x_0)$ de (t_0, x_0) dans lequel f est k -lipschitzienne.

Théorème 1.2. (Unicité) Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue et localement lipschitzienne en x pour tout $(t_0, x_0) \in \Omega$, le problème (1.2) admet une solution unique.

Cas particulier

Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^n ($n \in \mathbb{N}$) et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue. On considère le système autonome :

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)), & t \in [0, T[\\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (1.3)$$

Théorème 1.3. Soit x la solution maximale de (1.3) définie pour $t \in [0, T[$ si x est bornée sur $[0, T[$, alors $T = +\infty$.

Proposition 1.4. Soit l'équation différentielle :

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t)) \quad (1.4)$$

où $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est de classe C^1 .

Si $x(\cdot)$ et $y(\cdot) : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \Omega$ sont deux solutions de (1.4) définies sur le même intervalle I qui coïncident en un point $t_0 \in I$ i.e ($x(t_0) = y(t_0)$), alors elles sont égales.

Définition 1.5. on appelle trajectoire partant de u_0 l'ensemble :

$$\mathcal{T}_{u_0} = \{u(t)/t \in (-T, T)\}$$

où $(u(t))_{t \in (-T, T)}$ est la solution maximale correspondant à la condition initiale $u(0) = u_0$.

1.3 Stabilité et bornitude des solutions

On considère le système non autonome

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (1.5)$$

tel que $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ continue en t localement lipschitzienne en x .

Définition 1.6. [4] On dit que a est un point d'équilibre du système (1.5) si $f(t, a) = 0$ pour tout $t \geq 0$.

Définition 1.7. (Bornitude des solutions) [4] Les solutions du système (1.5) sont :

1. Uniformément bornées s'il existe une constante positive c , indépendante de $t_0 \geq 0$, tel que pour tout $a \in]0, c[$, il existe $\beta = \beta(a) > 0$, indépendante de t_0 , satisfaisant

$$\|x(t_0)\| \leq a \implies \|x(t)\| \leq \beta, \quad \forall t \geq t_0. \quad (1.6)$$

2. Globalement uniformément bornées si (1.6) est vérifiée pour $a \in]0, +\infty[$.

On dit aussi que la solution est stable au sens de Lagrange.

Définition 1.8. [4] Le point d'équilibre a de (1.5) est stable si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon, t_0) > 0 : \|x(t_0) - a\| < \delta \implies \|x(t) - a\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0 \geq 0.$$

Si, de plus,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \|x(t) - a\| = 0$$

le point a est dit asymptotiquement stable.

Définition 1.9. [4] On dit que le point d'équilibre a est uniformément stable si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \|x(t_0) - a\| < \delta \implies \|x(t) - a\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0 \geq 0.$$

Si, de plus,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \|x(t) - a\| = 0$$

le point a est dit uniformément asymptotiquement stable.

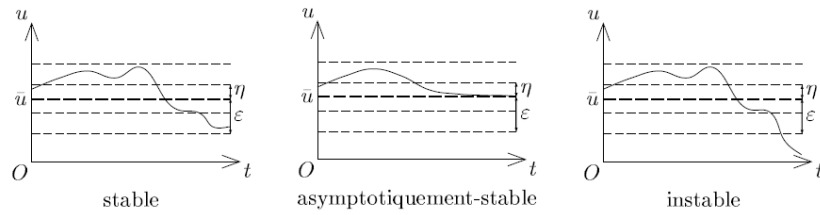


FIGURE 1.1 –

1.4 Cas non-linéaire : Méthode de linéarisation

Pour simplifier les notations, on suppose que $f(0) = 0$ et on s'intéresse au comportement autour du point d'équilibre 0. On fait également l'hypothèse que f différentiable en 0. Au voisinage du point 0, la linéarisation du système (1.3) est le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = Df(0)x(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

On s'intéresse au point d'équilibre 0.

($\sigma(Df(0))$ désigne le spectre de $Df(0)$).

Théorème 1.5. (linéarisation)

Si f est différentiable en 0 et $f(0) = 0$, alors :

1. Si : $\forall \lambda \in \sigma(Df(0)), \operatorname{Re} \lambda < 0$, alors 0 est asymptotiquement stable pour (1.5).
2. Si : $\exists \lambda \in \sigma(Df(0)), \operatorname{Re} \lambda > 0$, alors 0 est instable pour (1.5).
3. Si : $\forall \lambda \in \sigma(Df(0)) : \lambda$ est imaginaire pure, dans ce cas le principe de linéarisation ne s'applique pas.

1.5 Théorie de Lyapunov

Définition 1.10. [5] Si $\varphi \in C([0, h], \mathbb{R}_+)$ est strictement croissante et $\varphi(0) = 0$ on dit que φ est de classe \mathcal{K} .

Définition 1.11. [5] On considère le système (1.5). Soit $D \subset \mathbb{R}^n$ un voisinage de 0 et $V : \mathbb{R}_+ \times D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et différentiable sur D . La fonction V est dite semi définie positive si :

1. $V(t, 0) = 0, \forall t \in \mathbb{R}_+$.
2. $V(t, x) \geq 0$ si $x \in D - \{0\}$.

Définition 1.12. [5] Soit $D \subset \mathbb{R}^n$ un voisinage de 0 et $W : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et différentiable sur D . La fonction W est dite définie positive si :

1. $W(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
2. $W(x) > 0$ si $x \in D - \{0\}$.

Définition 1.13. [5] Soit $D \subset \mathbb{R}^n$ un voisinage de 0 et $V : \mathbb{R}_+ \times D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et différentiable sur D . La fonction V est dite définie positive si :

1. $V(t, 0) = 0, \forall t \in \mathbb{R}_+$.
2. Il existe une fonction $W_1(x)$ définie positive telle que : $W_1(x) \leq V(t, x), \forall t \in \mathbb{R}_+, \forall x \in D$.

Définition 1.14. [5] Soit $D \subset \mathbb{R}^n$ un voisinage de 0 et $V : \mathbb{R}_+ \times D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et différentiable sur D . La fonction V est dite décroissante s'il existe une fonction $W_2(x)$ définie positive telle que : $V(t, x) \leq W_2(x), \forall t \in \mathbb{R}_+, \forall x \in D$.

Lemme 1.6. [5] Si $V(t, x)$ est une fonction définie positive sur D alors il existe une fonction $W_1(x)$ définie positive telle que $W_1(x) \leq V(t, x), \forall x \in D$ ce qui implique l'existence d'une fonction α_1 de classe \mathcal{K} telle que

$$\alpha_1(\|x\|) \leq W_1(x) \leq V(t, x), \forall x \in B_r \subset D.$$

avec B_r est la boule unité sur l'espace \mathbb{R}^n .

Si de plus $V(t,x)$ est une fonction décroissante sur D alors il existe une fonction définie positive $W_2(x)$ tel que $V(t,x) \leq W_2(x), \forall x \in D$, ce qui implique l'existence d'une fonction α_2 de classe \mathcal{K} telle que

$$V(t,x) \leq W_2(x) \leq \alpha_2(\|x\|), \forall x \in B_r \subset D.$$

Donc $V(t,x)$ est une fonction définie positive et décroissante sur D si et seulement s'il existe des fonctions α_1 et α_2 de classe \mathcal{K} telle que

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(t,x) \leq \alpha_2(\|x\|), \forall x \in B_r \subset D.$$

Définition 1.15. [3] (Fonction de Lyapunov) Soit D un voisinage de 0 et $V : \mathbb{R}_+ \times D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et différentiable sur D .

1. On dit que V est une fonction de Lyapunov au sens large en 0 si elle vérifie les deux propriétés suivantes :
 - i. V est définie positive.
 - ii. $\dot{V}(t,x) \leq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \forall x \in D$.
2. On dit que V est une fonction de Lyapunov stricte en 0, si elle vérifie les deux propriétés suivantes :
 - i. V est définie positive.
 - ii. $\dot{V}(t,x) < 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \forall x \in D - \{0\}$.

Théorème 1.7 (Théorème de Lyapunov Autonome[10]). Soit 0 un point d'équilibre de système autonome suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = f(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (1.7)$$

S'il existe un voisinage A de 0 et une fonction

$$V : A \rightarrow \mathbb{R}^+$$

continue, ayant des dérivées partielles continues, telle que :

1. V soit définie positive

2. La dérivée totale \dot{V} de la fonction V le long de trajectoire du système (1.7) soit négative alors 0 est stable. V s'appelle une fonction de Lyapunov. De plus si la dérivée totale \dot{V} pour (1.7) est définie négative, alors 0 est asymptotiquement stable. V s'appelle une fonction stricte de Lyapunov.

Théorème 1.8 (Théorème d'instabilité [10]). Soit 0 un point d'équilibre de (1.7), s'il existe un voisinage A de 0 et une fonction

$$W : A \rightarrow \mathbb{R}^+$$

continue, ayant des dérivées partielles continues, telle que :

1. pour tout $y \in v \setminus \{0\}$, $W(y) > W(0)$.
2. la dérivée totale \dot{W} de la fonction W le long de trajectoire du système (1.7) soit définie positive alors, 0 est instable.

1.6 Points critiques et extremums libres

Définition 1.16. Soient U un ouvert de \mathbb{R}^n , $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 , on dit que $a \in U$ est un point critique ou singulier ou stationnaire de f si toutes les dérivées partielles de la fonction f sont nulles en a , c'est-à-dire $\nabla f(a) = 0$.

Théorème 1.9. Soit f une fonction d'un ouvert U de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} de classe C^2 et $a \in U$ un point critique de f , si on pose la notation de MONGE :

$$r = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}(a) , t = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}(a) , s = \frac{\partial^2 G(x,y)}{\partial x \partial y}(a)$$

On a :

1. Si $rt - s^2 > 0$ et $r > 0$, on dit que la fonction f admet en a un minimum local.
2. Si $rt - s^2 > 0$ et $r < 0$, on dit que la fonction f admet en a un maximum local.
3. Si $rt - s^2 < 0$, f n'admet en a ni maximum ni minimum local , mais un point selle ou point col.
4. Si $rt - s^2 = 0$, on peut pas conclure.

Le système proie-prédateur de Lotka Volterra

2.1 Description des variables

On s'intéresse à l'évolution au cours du temps d'un système biologique composé de deux espèces : espace des proies (Gazelles ou sardines) et espace des prédateurs (Lions ou requins, respectivement).

Pour cela, on note $X(t)$ le nombre de proies et $Y(t)$ le nombre de prédateurs à l'instant t . Donc $X : t \rightarrow X(t)$ et $Y : t \rightarrow Y(t)$ sont des fonctions de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{N} , alors elles sont discontinues.

Afin de disposer d'outils mathématiques, on préfère travailler avec de variables continues.

C'est pour ça on considère deux nouvelles quantités :

$$x(t) = \frac{X(t)}{X_0} \text{ et } y(t) = \frac{Y(t)}{Y_0}$$

avec X_0 est le nombre de proies à l'instant t et Y_0 est le nombre de prédateurs à l'instant t , sont fixés et grands.

Les quantités x et y sont donc des proportions de proies et prédateurs respectivement

Les variations de $x(t)$ et $y(t)$ sont donc des quantités petites, si bien que l'on peut faire l'hypothèse que $x : t \rightarrow x(t)$ et $y : t \rightarrow y(t)$ sont des fonctions continues de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R} . (car X_0 étant très grand par rapport à la différence $X_{t_1} - X_{t_2}$ avec $t_1, t_2 > 0$ donc

$x(t_1) - x(t_2)$ très petit).

Pour la suite, on fera l'hypothèse de régularité supplémentaire de supposer ces fonctions dérivables.

Enfin, considérons les taux de variation sur un intervalle $[t, t + \Delta t]$ comme suite : $\frac{\Delta X(t)}{X(t)}$ avec : $\Delta X(t) = \frac{X(t + \Delta t) - X(t)}{\Delta t}$

D'où : $\frac{\Delta x(t)}{x(t)} = \frac{\Delta X(t)}{X(t)}$, $t \in [t, t + \Delta t]$, en effet :

$$\begin{aligned} \Delta x(t) &= \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \\ &= \frac{\frac{X(t + \Delta t) - X(t)}{X_0}}{\Delta t} \\ &= \frac{X(t + \Delta t) - X(t)}{X_0 \Delta t} \end{aligned}$$

Donc :

$$\frac{\Delta x(t)}{x(t)} = \frac{\Delta x(t)}{\frac{X(t)}{X_0}} = \frac{\frac{X(t + \Delta t) - X(t)}{\Delta t}}{X(t)} = \frac{\Delta X(t)}{X(t)}$$

Si on suppose que les variations de $X(t)$ sont petites par rapport à $X(t)$ (ce qui Paraît vraisemblable seulement pour des populations nombreuses), on peut passer à la limite :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x(t)}{x(t)} = \frac{x'(t)}{x(t)}$$

De même façon pour y .

2.2 Mise en équation

$\frac{x'(t)}{x(t)}$: c'est le taux de variation de la population de proies.

$\frac{y'(t)}{y(t)}$: c'est le taux de variation de la population de prédateurs.

En l'absence de prédateurs, les proies ont un taux de croissance constant (on suppose la nourriture abondante et l'absence de compétition) d'où :

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = a; a > 0 : \text{c'est l'équation de reproduction normale d'une population biologique}$$

.

De même, les prédateurs ont tendance à disparaître en l'absence de proies, faute de nourriture d'où :

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = -c; c > 0 : \text{c'est l'équation qui régit la décadence d'une population biologique.}$$

Il reste à prendre en compte les interactions entre les deux espèces : le taux de prédation (taux de décroissance des proies dû aux prédateurs) est supposé proportionnel au nombre de prédateurs.

On note par by ; $b > 0$ le taux de mortalité des proies dû aux prédateurs.

De la même façon, le taux de variation du nombre de prédateurs est proportionnel à la quantité de nourriture à leur disposition, c'est-à-dire au nombre de proies.

On note par dx ; $d > 0$ le taux de croissance relative des prédateurs dû à l'abondance de nourriture (l'abondance des proies).

Ces considérations nous conduisent aux équations suivantes :

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = a - by$$

$$\text{et } \frac{y'(t)}{y(t)} = -c + dx; a, b, c, d > 0$$

avec $x(t_0) = x_0$ et $y(t_0) = y_0$ sont les nombres des proies et des prédateurs de départ respectivement .

Donc on trouve le système différentiel non linéaire autonome suivant :

$$\begin{cases} x' = x(a - by) \\ y' = y(-c + dx) \end{cases} \quad (x(0), y(0)) = (x_0, y_0), x_0, y_0 > 0 \quad (2.1)$$

Ce système est appelé système de **LOTKA VOLTERRA**.

But de l'étude

On désire obtenir des informations sur les solutions du système (2.1), c'est-à-dire connaître l'évolution des quantités x et y au cours du temps, est-ce que $x(t)$ et $y(t)$ restent des quantités positives au cours du temps, est-ce qu'une des deux populations s'éteint en temps fini, en temps infini,.. etc. Il est important que le modèle soit fidèle aux observations faites dans la nature afin d'être utile dans un but prédictif.

Comme on se sait pas calculer de solution exacte à l'aide d'une formule analytique, on est contraint d'étudier le système différentiel (2.1) de manière qualitative.

2.3 Application au système de Lotka Volterra

En posant $u(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ alors on a le système :

$$\begin{cases} u'(t) = f(u(t)) \\ u(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \end{cases} \quad \text{avec } f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(a - by) \\ y(-c + dx) \end{pmatrix}$$

Avec la fonction f est de classe C^1 donc est localement lipschitzienne, par l'application de théorème de Cauchy-Lipchiz (1.7) l'existence locale est assurée. De plus, on peut déduire la positivité des solutions :

Proposition 2.1. 1. Si $x(t_0) = 0$ alors pour tout $t < T$, $x(t) = 0$.

2. Si $\exists t_0 < T$ tel que $x(t_0) = 0$, alors $\forall t \in [0, T[: x(t) = 0$.

3. Si $x(t_0) > 0$ alors pour tout $t > 0$, $x(t) > 0$.

De même pour y .

Démonstration.

1. Si $x(t_0) = 0$: on a $x' = x(a - by) \implies \int_{t_0}^t \frac{x'(s)}{x(s)} dx(s) = \int_{t_0}^t (a - by) dx(s) \implies x(t) = e^{ax(t)-bx(t)y(t)}.k / k \in \mathbb{R}$

comme $x(t_0) = 0$ alors $x(t_0) = k = 0 \implies x(t) = 0$.

On a $y'(t) = y(-c + dx(t))$

Comme $x(t) = 0$ alors :

$$\int_0^t \frac{y'(s)}{y(s)} dy(s) = \int_0^t -c dy(s) \implies y(t) = y_0 e^{-c}$$

Donc la solution est $(0, y_0 e^{-ct})$ est positive.

2. s'il existe $t_0 < T$ tel que $x(t_0) = 0$, alors :

$$x'(t) = x(t)(a - by(t)) \implies \int_0^t \frac{x'(s)}{x(s)} dx(s) = \int_0^t (a - by(s)) dx(s) \\ \implies x(t) = e^{ax(t)-bx(t)y(t)}.k, / k \in \mathbb{R}, \text{ comme } x(t_0) = 0 \text{ alors } x(t) = 0 \text{ et } y(t) = y_0 e^{-c(t-t_0)}.$$

Donc la solution $(0, y_0 e^{-c(t-t_0)})$ est positive.

3. Si $x_0 > 0$ alors $(x(t), y(t)) = (x_0 e^{ax(t)-bx(t)y(t)}, y_0 e^{-cy(t)+dx(t)y(t)})$ est positive. □

Proposition 2.2. Soit $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour $x, y > 0$ par :

$$H(x, y) = dx - c \ln x + by - a \ln y.$$

Alors H est une intégrale première pour le système (2.1).i.e : si $(x(t), y(t))$ est une solution de système (2.1) alors $\forall t < T : H(x(t), y(t)) = cst$.

Démonstration. Pour montrer que H est une intégrale première pour le système (2.1), il suffit de montrer que : si $(x(t), y(t))$ est une solution de système (2.1) alors $\forall t < T : H(x(t), y(t)) = cst$

On a $\forall t < T :$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}H(x(t), y(t)) &= d \frac{\partial x(t)}{\partial t} - c \frac{1}{x(t)} \frac{\partial x(t)}{\partial t} + b \frac{\partial y(t)}{\partial t} - a \frac{1}{y(t)} \frac{\partial y(t)}{\partial t} \\ &= d[x(a - by)] - c \frac{1}{x(t)} [x(a - by)] + b[y(-c + dx)] - a \frac{1}{y(t)} [y(-c + dx)] \end{aligned}$$

car on a d'après l'hypothèse $(x(t), y(t))$ est une solution de système (2.1), donc :

$$\frac{d}{dt}H(x(t), y(t)) = dxa - bdx y - ca + cby - cby + bdx y + ac - adx = 0.$$

Donc $\forall t < T : H(x(t), y(t)) = cst$, alors H est une intégrale première pour le système (2.1) . \square

Lemme 2.3. La solution $(x(t), y(t))$ est bornée.

Démonstration. On a :

$$\exists A > 0, \forall x > A : c \ln x < \frac{dx}{2} \text{ ---} (1).$$

$$\exists B > 0, \forall x > B : a \ln y < \frac{by}{2} \text{ ---} (2).$$

D'autre part, $\exists \alpha \in \mathbb{R}, \forall x, y > 0$ tel que :

$$\begin{cases} dx > c \ln x + \alpha \\ by > a \ln y + \alpha \end{cases} \implies \begin{cases} dx - c \ln x > \alpha \text{ ---} (3) \\ by - a \ln y > \alpha \text{ ---} (4) \end{cases}$$

D'après l'inégalité(1) : $-c \ln x > -dx$ donc $dx - c \ln x > \frac{dx}{2}$ --- (5) (car $dx > 0$)

D'après la sommation des inégalités (5) et (4), on trouve :

$$dx - c \ln x + by - a \ln y > \frac{dx}{2} + \alpha \implies H(x, y) > \frac{dx}{2} + \alpha$$

D'autre part : d'après (2) on a : $by - a \ln y > \frac{by}{2}$ --- (6)

D'après la sommation des inégalités (6) et (3), on trouve :

$$by - a \ln y + dx - c \ln x > \frac{by}{2} + \alpha \implies H(x, y) > \frac{by}{2} + \alpha$$

Alors $\forall x > A$ et $y > B$ on a :

$$\begin{cases} x < \frac{2}{d}[H(x, y) - \alpha] \\ y < \frac{2}{b}[H(x, y) - \alpha] \end{cases}$$

Et comme H est une fonction constante alors : $H(x, y) = cst = H(x_0, y_0)$, et on a les solutions x, y sont positives donc :

$\forall t \in [0, T] :$

$$\begin{cases} 0 < x(t) < \max \left\{ A, \frac{2}{d}[H(x_0, y_0) - \alpha] \right\} \\ 0 < y(t) < \max \left\{ B, \frac{2}{b}[H(x_0, y_0) - \alpha] \right\} \end{cases}$$

Alors la solution maximale $(x(t), y(t))$ est bornée $\forall t \in [0, T[$.

On déduit d'après le théorème 1.3 que $T = +\infty$. Alors la solution maximale $(x(t), y(t))$ est bornée $\forall t \geq 0$. □

2.4 Comportement au voisinage d'un point d'équilibre

Les points d'équilibre du système de LOTKA-VOLTERRA

On a : En posant $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, le système (2.1) devient :

$$\begin{cases} u'(t) = f(u(t)) \\ u(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Avec :

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(a - by) \\ y(-c + dx) \end{pmatrix}$$

$$f(u) = 0 \implies \begin{cases} x(a - by) = 0 \\ y(-c + dx) = 0 \end{cases}.$$

D'où :

$$\begin{cases} x = 0 & \text{ou} & y = \frac{a}{b} \\ y = 0 & \text{ou} & x = \frac{c}{d} \end{cases}$$

Donc les points d'équilibre pour le système (2.1) sont $O(0,0)$ et $\omega \left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b} \right)$.

L'étude de point (0,0)

On a la fonction $(x,y) \rightarrow f(x,y)$ est différentielle sur \mathbb{R}^2 , si on pose :

$$f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y)) \text{ tel que : } \begin{cases} f_1(x,y) = x(a - by) \\ f_2(x,y) = y(-c + dx) \end{cases}$$

Donc :

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - by & -bx \\ dy & -c + dx \end{pmatrix}$$

Donc :

$$Df(0,0) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix}$$

Donc :

$$\det(Df(0,0) - \lambda I) = 0 \implies \lambda^2 + \lambda(c - a) - ac = 0 \implies \lambda_1 = a > 0, \lambda_2 = -c < 0.$$

D'après le théorème 1.5 , on a le point (0,0) est instable.

L'étude de point $\omega(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$

Il y a trois comportements possibles des orbites du système (2.1) pour le point $\omega(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$ à s'avoir :

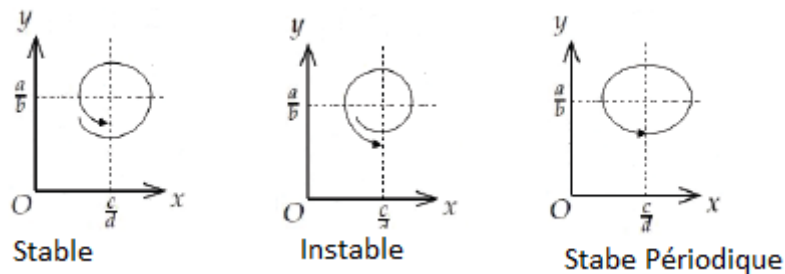


FIGURE 2.1 –

On pose $x = g + \frac{c}{d}$ et $y = h + \frac{a}{b}$

Alors si $(x, y) = \left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$, donc $(g, h) = (0, 0)$

En faisant ce changement de variable au système (2.1) devient :

$$\begin{cases} g' = -bh \left(g + \frac{c}{d}\right) \\ h' = dg \left(h + \frac{a}{b}\right) \end{cases} \quad (2.2)$$

Ce système, on peut l'écrire comme suit :

$$G' = F(G) \quad \text{où} \quad F(G) = F(g, h) = \left(-bh \left(g + \frac{c}{d}\right), dg \left(h + \frac{a}{b}\right)\right)^t$$

La fonction F est différentielle sur \mathbb{R}^2 , alors la linéarisation du système (2.2) est :

$$\begin{cases} G'(t) = DF(0)G(t) \\ G(0) = G_0 \end{cases}$$

tel que :

$$DF(g, h) = \begin{pmatrix} -bh & -bg - \frac{cb}{d} \\ d \left(h + \frac{a}{b}\right) & dg \end{pmatrix}$$

Doù :

$$DF(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{cb}{d} \\ \frac{da}{b} & 0 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de la matrice $DF(0,0)$, sont $\lambda_1 = i\sqrt{ac}$ et $\lambda_2 = -i\sqrt{ac}$, donc λ_1 et λ_2 sont imaginaires pures .

Dans ce cas, le principe de linéarisation ne s'applique pas, et $\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$ est un point centre.

Comme la méthode de linéarisation n'a pas donné de résultat précis sur le comportement au voisinage de $\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$, on a adapté la deuxième méthode de Lyapunov.

Considérons la fonction :

$V :]-\frac{c}{d}, +\infty[\times]-\frac{a}{b}, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$V(x,y) = H(x + \frac{c}{d}, y + \frac{a}{b}) - H(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$$

1. Si on pose :

$G : D_G =]-\frac{c}{d}, +\infty[\times]-\frac{a}{b}, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$. tel que :

$$G(x,y) = H(x + \frac{c}{d}, y + \frac{a}{b})$$

On va montrer que la fonction G admet un minimum au point $(0,0)$:

$$\text{On a : } G(x,y) = dx - c \ln\left(x + \frac{c}{d}\right) + by - a \ln\left(y + \frac{a}{b}\right) + a + c$$

On a la fonction G est différentielle au point $(0,0)$ et on a :

$$\frac{\partial G(x,y)}{\partial x} = d - \frac{c}{x + \frac{c}{d}} \text{ et } \frac{\partial G(x,y)}{\partial y} = b - \frac{a}{y + \frac{a}{b}} \quad (2.3)$$

Et on a :

$$\frac{\partial^2 G(x,y)}{\partial x^2} = \frac{c}{\left(x + \frac{c}{d}\right)^2}, \frac{\partial^2 G(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 G(x,y)}{\partial y \partial x} = 0, \frac{\partial^2 G(x,y)}{\partial y^2} = \frac{a}{\left(y + \frac{a}{b}\right)^2}$$

Comme

$$\frac{\partial G(x,y)}{\partial x} = 0 \text{ et } \frac{\partial G(x,y)}{\partial y} = 0 \implies (x,y) = (0,0)$$

Donc $(0,0)$ est un point critique de la fonction G .

On a $\frac{\partial^2 G(x,y)}{\partial x^2} > 0$ et :

$$\frac{\partial^2 G(x,y)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 G(x,y)}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 G(x,y)}{\partial x \partial y} > 0$$

Alors d'après le théorème 1.9 la fonction G admet un minimum au point $(0,0)$

2. a) $V(x,y) = 0 \iff (x,y) = (0,0)$

- On a $(x,y) = (0,0) \implies V(x,y) = H\left(0 + \frac{c}{d}, 0 + \frac{a}{b}\right) - H\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right) = 0$

- On suppose que $V(x,y) = 0$ et on doit montrer que $(x,y) = (0,0)$:

Par l'absurde : on suppose que $\exists (x_0, y_0) \in D_G \setminus \{(0,0)\}$ tel que $V(x_0, y_0) = 0$

.

Comme $V(x,y) = H(x + \frac{c}{d}, y + \frac{a}{b}) - H(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}) \geq 0, \forall (x,y) \in D_G$ donc :
 $V(x,y) > V(x_0,y_0)$ et alors la fonction V admet un minimum au point
 (x_0,y_0) Donc :

$$\begin{cases} \frac{\partial V(x_0, y_0)}{\partial y} = d - \frac{c}{x_0 + \frac{c}{d}} = 0 \\ \frac{\partial V(x_0, y_0)}{\partial x} = b - \frac{a}{y_0 + \frac{a}{b}} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_0 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases} \quad (\text{contradiction})$$

Alors $V(x,y) = 0 \iff (x,y) = (0,0)$

b) $\forall (x,y) \in D_G \setminus \{(0,0)\}, V(x,y) > 0 :$

On a :

$$\begin{aligned} V(x,y) &= H(x + \frac{c}{d}, y + \frac{a}{b}) - H(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}) \\ &= G(x,y) - G(0,0) \end{aligned}$$

Comme la fonction G admet un minimum au point $(0,0)$ alors

$G(x,y) > G(0,0)$ et donc $V(x,y) > 0$.

c) $\forall (x,y) \in D_G$

$$\begin{aligned} \dot{V}(x,y) &= \frac{\partial V}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} \\ &= \left(d - \frac{c}{x + \frac{c}{d}} \right) x' + \left(b - \frac{a}{y + \frac{a}{b}} \right) y' \\ &= \left(d - \frac{c}{x + \frac{c}{d}} \right) (-by(x + \frac{c}{d})) + \left(b - \frac{a}{y + \frac{a}{b}} \right) (dx(y + \frac{a}{b})) \\ &= \left(\frac{dx}{x + \frac{c}{d}} \right) (-by(x + \frac{c}{d})) + \left(\frac{by}{y + \frac{a}{b}} \right) (dx(y + \frac{a}{b})) \\ &= -dbxy + dbxy = 0 \end{aligned}$$

D'après le théorème 1.7 le point d'équilibre $(0,0)$ est stable par rapport à le système (2.2) et donc $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$ est stable par rapport à le système (2.1). Par conséquent la deuxième figure n'a pas lieu.

2.4.1 Périodicité des solutions

Théorème 2.4. *Les solutions du système de Lotka-Volterra sont périodiques .*

Démonstration. On a dessiné sur le schéma le champ des vitesses pour le système de Lotka-Volterra celui-ci délimite le quart de plan en 4 zones : I, II, III, et IV dans les quelles x et y sont monotones :

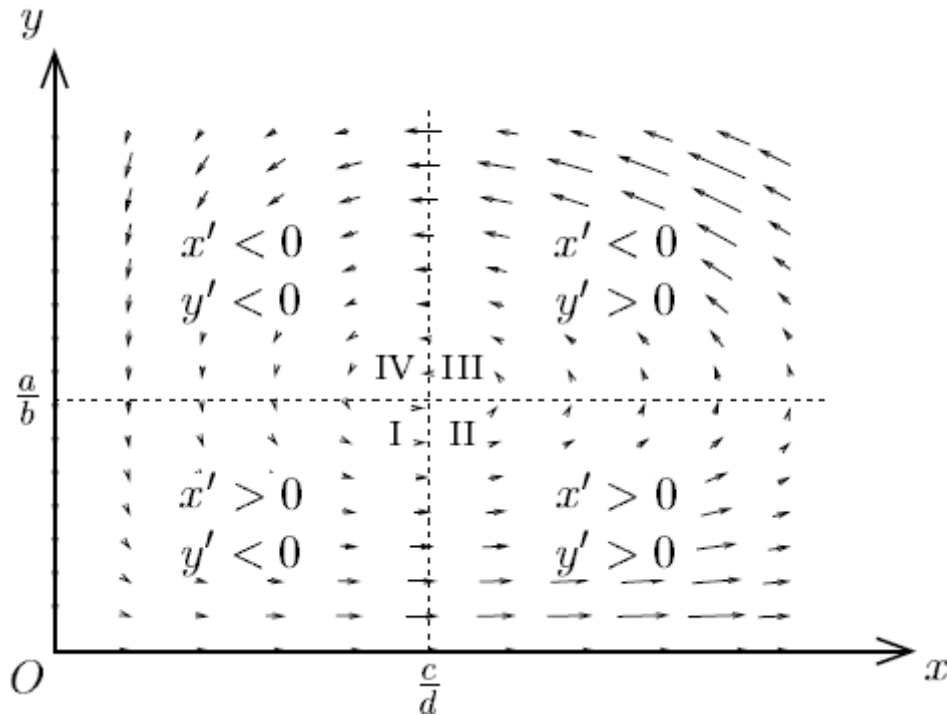


FIGURE 2.2 –

$$\begin{aligned}
 Z_I &= \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* / x < \frac{c}{d} \text{ et } y < \frac{a}{b}\} \\
 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* / dx < c \text{ et } by < a\}. \\
 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* / dxy - cy < 0 \text{ et } -bxy + ax > 0\} \\
 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* / y' < 0 \text{ et } x' > 0\}
 \end{aligned}$$

Donc x est strictement croissante et y est strictement décroissante sur Z_I .

$$\begin{aligned}
 Z_{II} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* / x > \frac{c}{d} \text{ et } y < \frac{a}{b}\} \\
 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* / dx > c \text{ et } by < a\}. \\
 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* / dxy - cy > 0 \text{ et } -bxy + ax > 0\} \\
 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* / y' > 0 \text{ et } x' > 0\}
 \end{aligned}$$

Donc x et y sont strictement croissantes sur la zone Z_{II} .

$$\begin{aligned}
 Z_{III} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* / x > \frac{c}{d} \text{ et } y > \frac{a}{b}\} \\
 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* / dx > c \text{ et } by > a\}. \\
 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* / dxy - cy > 0 \text{ et } -bxy + ax < 0\} \\
 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* / y' > 0 \text{ et } x' < 0\}
 \end{aligned}$$

Donc x est strictement décroissante et y est strictement croissante sur Z_{III} .

$$\begin{aligned}
 Z_{IV} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* / x < \frac{c}{d} \text{ et } y > \frac{a}{b}\} \\
 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* / dx < c \text{ et } by > a\}. \\
 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* / dxy - cy < 0 \text{ et } -bxy + ax < 0\} \\
 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* / y' < 0 \text{ et } x' < 0\}
 \end{aligned}$$

Donc x et y sont strictement décroissantes sur la zone Z_{IV} .

On a les étapes suivantes :

Étape 1. La solution parcourt les 4 zones successivement :

1. Dans la zone Z_I , x est strictement croissante et y est strictement décroissante donc il existe $t_1 > 0$ à partir du quel $M(t) = (x(t), y(t))$ quitte la zone Z_I et rentre la zone Z_{II} .
2. Dans la zone Z_{II} , x et y sont strictement croissantes et d'après le lemme 2.3, ils sont bornés donc il existe $t_2 > t_1$ à partir du quel $M(t) = (x(t), y(t))$ quitte la zone Z_{II} et rentre dans la zone Z_{III} .

Donc de même façon, on montre que :

- Il existe $t_3 > t_2$ à partir du quel $M(t) = (x(t), y(t))$ quitte la zone Z_{III} et rentre la zone Z_{IV}
- Il existe $t_4 > t_3$ à partir du quel $M(t) = (x(t), y(t))$ quitte la zone Z_{IV} et rentre la zone Z_I .
- Il existe $t_5 > t_4$ à partir du quel $M(t) = (x(t), y(t))$ quitte la zone Z_I et rentre la

zone Z_{II} .

Comme on a dessiné le graphe ci-dessus :

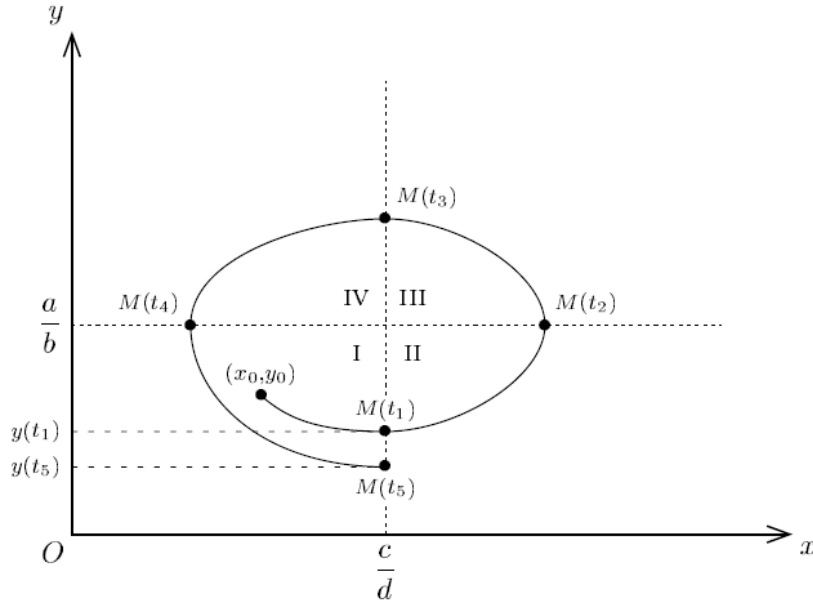


FIGURE 2.3 –

Étape 2. Les points $M(t_1)$ et $M(t_5)$ sont confondus :

Par définition on a déjà $x(t_1) = x(t_5) = \frac{c}{d}$.

De plus, comme $M(t_1)$ et $M(t_5)$ sont d'une même trajectoire alors :

$H(x(t_1), y(t_1)) = H(x(t_5), y(t_5))$ (d'après le proposition 1.4) donc :

$$by(t_1) - a \ln y(t_1) = by(t_5) - a \ln y(t_5) \implies h(y(t_1)) = h(y(t_5))$$

avec $h(y(t)) = by(t) - a \ln y(t)$.

On a la fonction h est continue sur \mathbb{R}_+^* et on a :

$$h' = b - \frac{a}{y} \in \mathbb{R}_+^* .$$

Comme la fonction h est strictement décroissante sur $]0, \frac{a}{b}[$ donc la fonction h est injective alors : $h(y(t_1)) = h(y(t_5)) \implies y(t_1) = y(t_5)$.

Donc : $(x(t_1), y(t_1)) = (x(t_5), y(t_5))$, et d'où $M(t_1) = M(t_5)$.

Étape 3. Les solutions sont périodiques :

Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose :

$$\tilde{x}(t) = x(t_5 + t) \text{ et } \tilde{y}(t) = y(t_5 + t), \bar{x}(t) = x(t_1 + t) \text{ et } \bar{y}(t) = y(t_1 + t).$$

On a :

$$x(t_1) = x(t_1 + 0) = \bar{x}(0) = \frac{c}{d} = x(t_5) = x(t_5 + (0)) = \tilde{x}(0).$$

$$\text{Et : } y(t_1) = y(t_1 + 0) = \bar{y}(0) = \frac{a}{b} = y(t_5) = y(t_5 + (0)) = \tilde{y}(0).$$

Donc $(\tilde{x}(0), \tilde{y}(0)) = (\bar{x}(0), \bar{y}(0))$, et comme :

$(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$ et $(\bar{x}(t), \bar{y}(t))$ sont vérifié le même problème de Cauchy (2.1) alors d'après la proposition 1.4 on a : $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) = (\bar{x}(t), \bar{y}(t))$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

$$\text{Donc : } (x(t_5 + t), y(t_5 + t)) = (x(t_1 + t), y(t_1 + t)).$$

$$\text{On a : } x(t_5 + t) = x(t_5 + t - t_1 + t_1) = x(t_1 + t + (t_5 - t_1)) = x(t_1 + t)$$

$$\text{Et : } y(t_5 + t) = y(t_5 + t - t_1 + t_1) = y(t_1 + t + (t_5 - t_1)) = y(t_1 + t)$$

Donc : $\forall s \in \mathbb{R} : M(s) = M(s + (t_5 - t_1))$, alors la solution est périodique de période $(t_5 - t_1)$. □

Conséquence :

La dernière figure représente exactement le comportement au voisinage d'un point d'équilibre $\omega\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$.

2.5 Moyenne sur une période

Définition 2.1. on définit les moyennes de x et y sur une période $[0, T]$ comme suit :

$$\langle x \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \text{ et } \langle y \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt .$$

Proposition 2.5. On a : $\langle x \rangle = \frac{c}{d}$ et $\langle y \rangle = \frac{a}{b}$.

Démonstration. D'après le système (2.1) on a :

$$\begin{cases} x' = x(a - by) \\ y' = y(-c + dx) \end{cases} \implies \begin{cases} y = -\frac{1}{b} \frac{x'}{x} + \frac{a}{b} \\ x = \frac{1}{d} \frac{y'}{y} + \frac{c}{d} \end{cases} \quad \square$$

Alors :

$$\begin{aligned}\langle x \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{d} \frac{y'(t)}{y(t)} + \frac{c}{d} dt \\ &= \frac{1}{T} \left[\frac{1}{d} \ln y(t) + \frac{c}{d} t \right]_0^T \quad (\text{car } y \text{ est périodique donc } y(0) = y(T)) \\ &= \frac{c}{d}\end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned}\langle y \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T -\frac{1}{b} \frac{x'(t)}{x(t)} + \frac{a}{b} dt \\ &= \frac{1}{T} \left[-\frac{1}{b} \ln x(t) + \frac{a}{b} t \right]_0^T \quad (\text{car } x \text{ est périodique donc } x(0) = x(T)) \\ &= \frac{a}{b}\end{aligned}$$

Remarque

Si dans le modèle de Lotka-Volterra, on ajoute un prédateur commun aux deux espèce (chasse ou pêche), on transforme le système (2.1) en :

$$\begin{cases} x' = x(a - by) - ex \\ y' = y(-c + dx) - fy \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \begin{cases} x' = xa - byx - ex \\ y' = -cy + dxy - fy \end{cases} &\iff \begin{cases} x' = x(a - e) - byx \\ y' = y(-c - f) + dxy \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x' = x[(a - e) - by] \\ y' = y[(-c - f) + dx] \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x' = x(\bar{a} - by) \\ y' = y(-\bar{c} + dx) \end{cases} \end{aligned}$$

avec $\bar{a} = a - e$, $\bar{c} = c + f$.

Donc on retrouve un système du Lotka-Volterra, donc les moyennes de x et y sur une période T sont :

$$\langle x \rangle = \frac{\bar{c}}{\bar{a}} \text{ et } \langle y \rangle = \frac{\bar{a}}{\bar{b}}.$$

Pour la suite on aura besoin du lemme suivant :

Lemme 2.6. soient λ un réel strictement positif et φ une fonction définie sur l'intervalle $] -\lambda, +\infty[$ par :

$$\varphi(x) = \int_{\lambda}^{x+\lambda} \frac{u - \lambda}{u} du .$$

Alors la fonction φ est définie positive.

Démonstration. On a pour tout $x \in] -\lambda, +\infty[$:

$$\varphi(x) = \int_{\lambda}^{x+\lambda} \frac{u - \lambda}{u} du = \lambda \left[\frac{1}{\lambda} x - \ln \left(\frac{1}{\lambda} x + 1 \right) \right]$$

Soit (C) la courbe représentative de la fonction $\phi : x \mapsto \ln \left(\frac{1}{\lambda} x + 1 \right)$ dans un repère orthonormé .

L'équation de la droite tangente (Δ) de (C) est $y = \frac{1}{\lambda} x$

Et comme $\phi \in C^2(] -\lambda, +\infty[, \mathbb{R})$ et $\phi''(x) = -\frac{1}{(x + \lambda)^2} < 0$, pour tout $x \in] -\lambda, +\infty[$

Donc la fonction ϕ est concave et donc la courbe de cette fonction est toujours en dessus de ses tangentes, donc (C) est au dessous de (Δ) et $(C) \cap (\Delta) = \{(0,0)\}$. Comme on a dessiné le graphe ci-dessus :

□

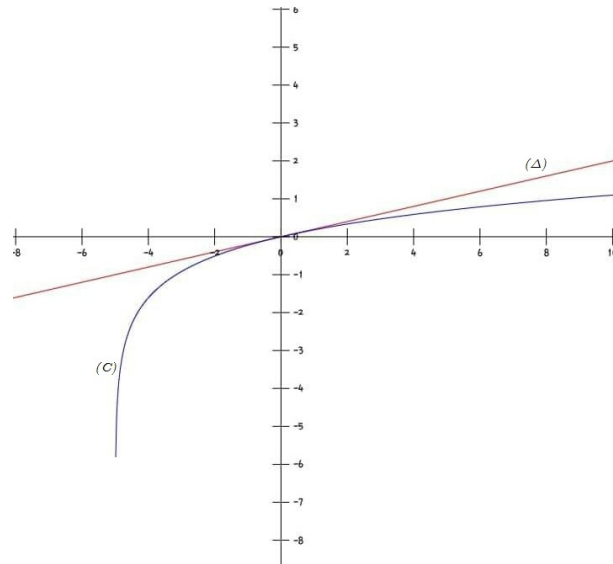


FIGURE 2.4 –

L'étude de l'équilibre $\omega\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$ par autre méthode :

Par recours à système linéaire (2.2) on a :

Considérons la fonction :

$V :]-\frac{c}{d}, +\infty[\times]-\frac{a}{b}, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$V(x, y) = d \int_{\frac{c}{d}}^{x+\frac{c}{d}} \frac{u - \frac{c}{d}}{u} du + b \int_{\frac{a}{b}}^{y+\frac{a}{b}} \frac{v - \frac{a}{b}}{v} dv$$

La fonction V est une fonction de Lyapunov. En effet :

1. i) par le lemme 2.6, si on pose $V(x, y) = d\varphi_1 + b\varphi_2$, comme $\frac{c}{d}$ et $\frac{a}{b}$ sont strictement positifs alors d'après le lemme on trouve φ_1 et φ_2 sont des fonctions définies positives et on obtient :

$$V(x, y) > 0, \quad \forall (x, y) \in]-\frac{c}{d}, +\infty[\times]-\frac{a}{b}, +\infty[- \{(0,0)\}$$

et $V(x, y) = 0$ si et seulement si $(x, y) = (0,0)$.

2. ii) Soit $(x, y) \in]-\frac{c}{d}, +\infty[\times]-\frac{a}{b}, +\infty[$:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, y) &= \frac{\partial V}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} \\ &= \left(d - \frac{c}{x + \frac{c}{d}} \right) x' + \left(b - \frac{a}{y + \frac{a}{b}} \right) y' \\ &= \left(\frac{dx}{x + \frac{c}{d}} (-by(x + \frac{c}{d})) \right) + \left(\frac{by}{y + \frac{a}{b}} (dx(y + \frac{a}{b})) \right) \\ &= -dbxy + dbxy = 0 \end{aligned}$$

D'après le théorème 1.7 le point $(0,0)$ est stable par rapport au système (2.2) d'où l'équilibre $\omega\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$ est stable.

Quelques modèles mathématiques de deux espèces

Dans ce chapitre, on se propose d'étudier quelques modèles mathématiques de deux espèces : Le modèle logistique, le modèle de Lotka-Volterra avec réponse fonctionnelle de Holling de type II, le modèle logistique de Lotka-Volterra dans le cas d'une réponse fonctionnelle de Holling type II, le modèle logistique de Lotka-Volterra dans le cas d'une réponse fonctionnelle de Holling type III, et modèle classique de mutualisme interspécifique.

3.1 Modèle logistique

Le modèle mathématique le plus fin qui permet la saturation des proies est le système suivant :

$$\begin{cases} x' = ax - bxy - ex^2 \\ y' = -cy + dxy \end{cases} \quad (3.1)$$

Ce système est appelé le modèle logistique de proie prédateur parce qu'il contient un terme logistique $-ex^2$ dans la première équation de système (3.1).

Nous acceptons $x' = kx$ l'équation de reproduction normale des proies tant que le nombre des proies n'est pas élevé. Lorsque ce nombre croît, la compétition entre les proies pour la nourriture conduit à une diminution de vitesse d'accroissement donc on peut écrire $k = a - ex$ avec a représente le nombre d'accroissement des proies et e représente le taux de mortalité des proies dû aux lui même. Alors le taux de variation du nombre des proies avant l'interaction entre les deux espèces : $\frac{x'}{x} = a - ex, \quad a, e > 0$.

Durant l'interaction entre les proies et les prédateurs il vient : $\frac{x'}{x} = a - ex - by, \quad b > 0$ et alors nous trouvons la première équation de système (3.1).

Les points d'équilibre

on a :

$$\begin{cases} x' = 0 \\ y' = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} ax - bxy - ex^2 = 0 \\ -cy + dxy = 0 \end{cases}$$

$$\implies (x, y) = (0, 0) \text{ ou } (x, y) = \left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b} - \frac{ce}{bd}\right), \text{ où } \frac{a}{b} > \frac{ce}{bd}$$

Étude de l'équilibre $\omega' \left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b} - \frac{ce}{bd}\right)$

On étudie cet équilibre en utilisant deux méthodes différentes :

1^{ère} Méthode :

On pose $x = g + \frac{c}{d}$ et $y = h + \frac{a}{b} - \frac{ce}{bd}$.

Alors : $(g, h) = (0, 0)$ si $(x, y) = \left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b} - \frac{ce}{bd}\right)$

Par substitution dans (3.1) on obtient :

$$\begin{cases} g' = \left(g + \frac{c}{d}\right) (-bh - eg) \\ h' = dg \left(h + \frac{a}{b} - \frac{ce}{bd}\right) \end{cases} \quad (3.2)$$

Celui-ci est équivalent à $G' = F(G)$ pour :

$$F(G) = F(g, h) = \left(\left(g + \frac{c}{d}\right) (-bh - eg), dg \left(h + \frac{a}{b} - \frac{ce}{bd}\right)\right).$$

La fonction F est différentielle sur \mathbb{R}^2 . Alors la linéarisation du système (3.2) est :

$$\begin{cases} G'(t) = DF(0)G(t) \\ G(0) = G_0 \end{cases}$$

tel que :

$$DF(g, h) = \begin{pmatrix} -bh - 2eg - \frac{ce}{d} & -bg - \frac{bc}{d} \\ dh + \frac{ad}{b} - \frac{ec}{b} & dg \end{pmatrix}$$

Donc :

$$DF(0,0) = B = \begin{pmatrix} -\frac{ce}{d} & -\frac{bc}{d} \\ \frac{ad - ce}{b} & 0 \end{pmatrix}$$

Si $\det(B - \lambda I) = 0$ on a $\lambda^2 + \frac{ce}{d}\lambda + \left(ac - \frac{c^2e}{d}\right) = 0$, alors :

$$\Delta = \frac{c^2e^2}{d^2} - 4ac + 4\frac{c^2e}{d} = \frac{c}{d^2} (ce^2 - 4d(ad - ce))$$

La condition $ad > ce$ n'est pas suffisante pour connaître le signe du Δ , pour cela on différencie trois cas :

1. Si $\Delta > 0$ il y a deux valeurs propres : $\lambda_1 = -\frac{ce}{2d} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$, $\lambda_2 = -\frac{ce}{2d} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$

on a $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_1 \times \lambda_2 = 2\left[ac - \frac{c^2e}{d}\right] = 2\left[\frac{c}{d}(ad - ce)\right] > 0$. (car $ad - ce > 0$), et comme $\lambda_1 < 0$ alors $\lambda_2 < 0$.

2. Si $\Delta = 0$ donc $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{ce}{2d} < 0$

3. Si $\Delta < 0$ donc :

$$\lambda_1 = -\frac{ce}{2d} - i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$$

et

$$\lambda_2 = -\frac{ce}{2d} + i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$$

On remarque que :

$$\operatorname{Re}(\lambda_1) = \operatorname{Re}(\lambda_2) < 0.$$

Alors dans tous les cas $\operatorname{Re}(\lambda_k) < 0$: $k = 1, 2$ Par conséquent le point $(0,0)$ est asymptotiquement stable par rapport au système (3.2). D'où l'équilibre $\omega' \left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b} - \frac{ce}{bd}\right)$ est asymptotiquement stable.

2^{ème} Méthode : Considérons la fonction :

$V :]-\frac{c}{d}, +\infty[\times]-\frac{a}{b} + \frac{ec}{bd}, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{aligned} V(g, h) &= d \int_{\frac{c}{a}}^{g+\frac{c}{a}} \frac{u - \frac{c}{d}}{u} du + b \int_{\frac{a}{b} - \frac{ec}{bd}}^{h+\frac{a}{b} - \frac{ec}{bd}} \frac{v - \frac{a}{b} - \frac{ec}{bd}}{v} dv \\ &= dg - c \ln \left(\frac{g + \frac{c}{d}}{\frac{c}{d}} \right) + bh - \left(a - \frac{ec}{d} \right) \ln \left(\frac{h + \frac{a}{b} - \frac{ec}{bd}}{\frac{a}{b} - \frac{ec}{bd}} \right) \end{aligned}$$

La fonction V est une fonction de Lyapunov. En effet :

1/. On voit d'après lemme 2.6 que :

$V(g, h) > 0$ pour tout $(g, h) \in]-\frac{c}{d}, +\infty[\times]-\frac{a}{b} + \frac{ec}{bd}, +\infty[- \{(0,0)\}$ et $V(g, h) = 0$ si et seulement si $(g, h) = (0,0)$.

2/. on a :

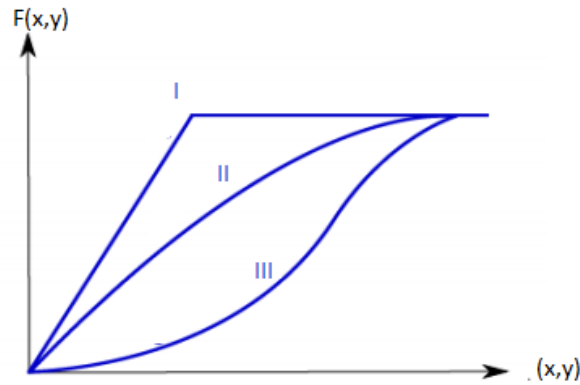
$$\begin{aligned} \dot{V}(g, h) &= \frac{\partial V}{\partial g} \cdot \frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial h} \cdot \frac{\partial h}{\partial t} \\ &= \left(d - \frac{c}{g + \frac{c}{d}} \right) g' + \left(b - \frac{a - \frac{ce}{d}}{h + \frac{a}{b} - \frac{ec}{bd}} \right) h' \\ &= \left(d - \frac{c}{g + \frac{c}{d}} \right) \left(g + \frac{c}{d} \right) (-bh - eg) + \left(b - \frac{a - \frac{ce}{d}}{h + \frac{a}{b} - \frac{ec}{bd}} \right) \left(dg \left(h + \frac{a}{b} - \frac{ce}{bd} \right) \right) \\ &= dg(-bh - eg) + dgbh \left(\frac{dbh + da - ce}{hbd + ad - ce} \right) \\ &= -deg^2 < 0 \end{aligned}$$

Alors V est une fonction de Lyapunov, donc le point $(0,0)$ est asymptotiquement stable par rapport au système (3.2). D'où la stabilité asymptotique de l'équilibre $\omega' \left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b} - \frac{ce}{bd} \right)$ par rapport au système (3.1).

3.2 Signification fonctionnelle du prédateur

Définition 3.1. On appelle signification fonctionnelle du prédateur la quantité de proies consommées par unité de temps par prédateur.

On va considérer trois différentes fonctions :



Les 3 reponses fonctionnelles de Holling

FIGURE 3.1 –

1. **Holling de type I ou modèle logistique de Lotka-Volterra** : La signification fonctionnelle est écrite sous forme : $\phi_1(x) = kx/k > 0$, avec k est le taux d'attaque du prédateur sur la proie. C'est la réponse fonctionnelle linéaire en la quantité de proies .
2. **Holling de type II** : La signification fonctionnelle est écrite sous forme :
$$\phi_2(x) = \frac{kx}{\alpha + hkx}, h, \alpha > 0$$
 avec h est représenté le paramètre de saturation du prédateur, et α est représenté la constante de demi-saturation pour le prédateur .
3. **Holling de type III** : La signification fonctionnelle est écrite sous forme :
$$\phi_3(x) = \frac{kx^2}{\alpha + hkx^2}, h, \alpha > 0.$$
 En plus de la saturation, cette réponse fonctionnelle diminue drastiquement la quantité de proies tuées lorsqu'il y en a très peu, et aussi, il y a une plus grande difficulté à trouver les proies lorsqu'elles sont peu nombreuses.

3.3 Modèle de Lotka-Volterra avec réponse fonctionnelle de Holling de type II

La première modification du modèle de Lotka-Volterra est due à Holling qui a remplacé la signification fonctionnelle linéaire de type I par celle de type II, il s'agit du système :

$$\begin{cases} x' = ax - \frac{bxy}{\alpha + x} \\ y' = \frac{dxy}{\alpha + x} - cy \end{cases} \quad (3.3)$$

où $a; b; c; d$ et α sont des constantes positives telles que :

a : le taux de croissance intrinsèque de la proie en l'absence de prédateur.

b : le taux de prédation (d'attaque) maximale du prédateur sur la proie.

α : la constante de demi-saturation pour le prédateur, qui est la quantité de proies au cours de laquelle la réponse fonctionnelle du prédateur est à moitié maximale.

d : le taux de conversion de la biomasse de proies en prédateurs.

c : le taux de mortalité du prédateur en l'absence de proie.

Les points d'équilibre :

on a :

$$\begin{cases} x' = 0 \\ y' = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x(a - \frac{by}{\alpha + x}) = 0 \\ y(\frac{dx}{\alpha + x} - c) = 0 \end{cases}$$

$$\implies (x,y) = (0,0) \text{ ou } (x,y) = (\frac{c\alpha}{d-c}, \frac{a}{b}(\alpha + \frac{c\alpha}{d-c})), \text{ où } d > c$$

$$\text{On pose : } A = \frac{c\alpha}{d-c}, B = \alpha + A \text{ et } C = \frac{a}{b}$$

Théorème 3.1. *Supposons que les conditions suivantes sont vérifiées :*

$$H1) d > c\alpha > a$$

$$H2) b(d - c\alpha) > adA\alpha$$

Alors le point d'équilibre $\omega_1 \left(\frac{c\alpha}{d-c}, \frac{a}{b} \left(\alpha + \frac{c\alpha}{d-c} \right) \right)$ du système (3.3) est instable.

Démonstration. On pose $x = g + \frac{c\alpha}{d-c}$ et $y = h + \frac{a}{b}(\alpha + \frac{c\alpha}{d-c})$.

Alors : $(g, h) = (0,0)$ si $(x, y) = (\frac{c\alpha}{d-c}, \frac{a}{b}(\alpha + \frac{c\alpha}{d-c}))$.

Par substitution dans(3.3) on obtient :

$$\begin{cases} g' = a(g + A) + \frac{b(g + A)(h + CB)}{\alpha + g + A} \\ h' = \frac{dgh + dgCB + dAh + dACB}{\alpha + g + A} - hc - CBc \end{cases} \quad (3.4)$$

Considérons la fonction :

$V :] - A, +\infty[\times] - CB, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{aligned} V(g, h) &= d \int_A^{g+A} \frac{u - A}{u} du + b \int_{CB}^{h+CB} \frac{v - CB}{v} dv \\ &= dg - c \ln\left(\frac{g + A}{A}\right) + bh - aB \ln\left(\frac{h + CB}{CB}\right) \end{aligned}$$

On voit d'après lemme 2.6 :

$V(g, h) > 0$ pour tout $(g, h) \in] - A, +\infty[\times] - CB, +\infty[- \{(0,0)\}$ et $V(g, h) = 0$ si et seulement si $(g, h) = (0,0)$.

On a :

$$\frac{\partial V}{\partial g} = d - \frac{dA}{g + A}$$

$$\frac{\partial V}{\partial h} = b - \frac{aB}{h + CB}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(g, h) &= \frac{\partial V}{\partial g} \cdot \frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial h} \cdot \frac{\partial h}{\partial t} \\
 &= \left(d - \frac{dA}{g+A}\right) \left(a(g+A) + \frac{b(g+A)(h+CB)}{(\alpha+g+A)}\right) + \left(b - \frac{aB}{h+CB}\right) \left(\frac{d(g+A)}{\alpha+g+A} - c\right) \\
 &= ad(g+A) - \frac{db(g+A)(h+CB)}{\alpha+g+A} - adA + \frac{dbA(h+CB)}{(\alpha+g+A)(h+CB)} + \frac{db(g+A)}{\alpha+g+A} - bc - \\
 &\quad \frac{adB(g+A)}{(h+CB)(\alpha+g+A)} + \frac{aBc}{(h+CB)} \\
 &= ad(g+A) - adA + \frac{dbA(h+CB)}{\alpha+g+A} - \frac{db(g+A)(h+CB)}{(\alpha+g+A)(h+CB)} + \frac{db(g+A) - bc(\alpha+g+A)}{\alpha+g+A} - \\
 &\quad \frac{adB(g+A) + aBc(\alpha+g+A)}{(h+CB)(\alpha+g+A)} \\
 &= ad(g+A) - adA - \frac{bd(h+BC)g}{\alpha+g+A} + \frac{b(g+A)}{\alpha+g+A}(d - c\alpha) + \frac{aB(g+A)}{(h+CB)(\alpha+g+A)}(c\alpha - a) \\
 &> ad(g+A) + \frac{bd(h+BC)(g+A)}{\alpha+g+A} + \frac{b(g+A)}{\alpha+g+A}(d - c\alpha) + \frac{aB(g+A)}{(h+CB)(\alpha+g+A)}(c\alpha - a) \\
 &> ad(g+A) + \frac{(g+A)}{\alpha+g+A}(-adA\alpha + b(d - c\alpha)) + \frac{aB(g+A)}{\alpha+g+A}(c\alpha - a)
 \end{aligned}$$

D'après H1) et H2) on a : $\dot{V}(g, h) > 0$

Donc d'après le théorème 3.1 le point au système (0,0) est instable par rapport au système (3.4) au voisinage de $] - A, A[\times] - CB, CB[$.

D'où l'instabilité de le point $\omega_1\left(\frac{c\alpha}{d-c}, \frac{a}{b}\left(\alpha + \frac{c\alpha}{d-c}\right)\right)$ par rapport au système (3.3). \square

3.4 Modèle logistique de Lotka-Volterra dans le cas d'une réponse fonctionnelle de Holling type II

Rosenzweig et MacArthur [9] ont donné leur nom au modèle de Lotka-Volterra qu'ils ont modifié en prenant en compte une croissance logistique des proies et une saturation des prédateurs avec une réponse fonctionnelle Holling de type II :

$$\begin{cases} x' = ax - \frac{a}{k}x^2 - \frac{bxy}{\alpha+x} \\ y' = \frac{dxy}{\alpha+x} - cy \end{cases} \quad (3.5)$$

où $a; b; c; d, k$ et α sont des constantes positives telles que :

a : le taux de croissance intrinsèque de la proie en l'absence de prédateur.

b : le taux de prédation (d'attaque) maximale du prédateur sur la proie.

α : la constante de demi-saturation pour le prédateur, qui est la quantité de proies au cours de laquelle la réponse fonctionnelle du prédateur est à moitié maximale.

d : le taux de conversion de la biomasse de proies en prédateurs.

c : le taux de mortalité du prédateur en l'absence de proie.

k : la capacité de portée du milieu en proies.

Les points d'équilibre :

on a :

$$\begin{cases} x' = 0 \\ y' = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} ax(1 - \frac{x}{k}) - \frac{bxy}{\alpha + x} = 0 \\ y(\frac{dx}{\alpha + x} - c) = 0 \end{cases}$$

$$\implies (x,y) = (0,0) \text{ ou } (x,y) = (\frac{c\alpha}{d-c}, B(a+A)(k-A)) \text{ ou } (x,y) = (k,0) .$$

$$\text{Où } d > c, k > A \text{ et } A = \frac{c\alpha}{d-c}, B = \frac{a\alpha c}{b} .$$

Théorème 3.2. Si on a : $\frac{c\alpha}{d}(a+A)(k-A) - \alpha + A > 0$

Alors le point d'équilibre $\omega_2 \left(\frac{c\alpha}{d-c}, \frac{a\alpha}{b}(a+A)(k-A) \right)$ du système (3.5) est stable.

Démonstration. On pose $x = g + \frac{c\alpha}{d-c}$ et $y = h + \frac{a\alpha}{b}(a+A)(k-A)$. Alors :

$$(g, h) = (0,0) \text{ si } (x, y) = \left(\frac{c\alpha}{d-c}, \frac{a\alpha}{b}(a+A)(k-A) \right) .$$

Par substitution dans(3.5) on obtient :

$$\begin{cases} g' = a(g+A)\left(1 - \frac{g+A}{k}\right) + \frac{b(g+A)(h+B(a+A)(k-A))}{\alpha+g+A} \\ h' = (h+B(a+A)(k-A))\left(\frac{d(g+A)}{\alpha+g+A} - c\right). \end{cases} \quad (3.6)$$

Considérons la fonction $V :]-A, +\infty[\times]-B(a+A)(k-A), +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{aligned} V(g, h) &= d \int_A^{g+A} \frac{u-A}{u} du + b \int_{B(a+A)(k-A)}^{h+B(a+A)(k-A)} \frac{v-B(a+A)(k-A)}{v} dv \\ &= dg - c \ln\left(\frac{g+A}{A}\right) + bh - a\alpha(a+A)(k-A) \ln\left(\frac{h+CB}{CB}\right) \end{aligned}$$

On voit d'après lemme 2.6 : $V(g, h) > 0$ pour tout $(g, h) \in]-A, +\infty[\times]-B(a+A)(k-A), +\infty[-\{(0,0)\}$ et $V(g, h) = 0$ si et seulement si $(g, h) = (0, 0)$.

On a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial g} &= d - \frac{dA}{g+A} \\ \frac{\partial V}{\partial h} &= b - \frac{a\alpha(a+A)(k-A)}{h+B(a+A)(k-A)} \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \dot{V}(g, h) &= \frac{\partial V}{\partial g} \cdot \frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial h} \cdot \frac{\partial h}{\partial t} \\ &= adg \frac{k-A-g}{k} - \frac{db(g+A)h}{\alpha+g+A} - \frac{dbB(a+A)(k-A)(g+A)}{\alpha+g+A} + \frac{bdh(g+A)}{\alpha+g+A} - bch + \\ &\quad \frac{dbB(a+A)(k-A)(g+A)}{\alpha+g+A} - bcB(a+A)(k-A) + \frac{a\alpha(a+A)(k-A)hc}{h+B(a+A)(k-A)} - \\ &\quad \frac{a\alpha dh(a+A)(k-A)(g+A)}{(\alpha+g+A)(h+B(a+A)(k-A))} - \frac{a\alpha dB(a+A)^2(k-A)^2(g+A)}{(\alpha+g+A)(h+B(a+A)(k-A))} + \\ &\quad \frac{a\alpha cB(a+A)^2(k-A)^2}{h+B(a+A)(k-A)} \\ &= adg \frac{k-A-g}{k} - \frac{db(g+A)h}{\alpha+g+A} - \frac{dbB(a+A)(k-A)(g+A)}{\alpha+g+A} + \frac{bdh(g+A)}{\alpha+g+A} - bch + \\ &\quad \frac{dbB(a+A)(k-A)(g+A)}{\alpha+g+A} - bcB(a+A)(k-A) + \\ &\quad \frac{a\alpha h\alpha(a+A)(k-A)}{(\alpha+g+A)(h+B(a+A)(k-A))} (c\alpha + (g+A)(c-d)) + \\ &\quad \frac{a\alpha B(a+A)^2(k-A)^2}{(\alpha+g+A)(h+B(a+A)(k-A))} (c\alpha + (g+A)(c-d)) \\ &< ad(g+A)\left(1 - \frac{A+g}{k}\right) - \frac{dbB(a+A)(k-A)(g+A)}{\alpha+g+A} + \frac{ca\alpha^2(a+A)(k-A)}{\alpha+g+A} \\ &< ad(g+A)\left(1 - \frac{A+g}{k}\right) + \frac{ca\alpha(a+A)(k-A)}{\alpha+g+A} (\alpha - \alpha - (g+A)) \\ &< a(g+A)(d(\alpha+g+A) - c\alpha(a+A)(k-A)) \end{aligned}$$

On a : $\frac{c\alpha}{d}(a+A)(k-A) - \alpha + A > 0$, si on pose : $g < \frac{c\alpha}{d}(a+A)(k-A) - \alpha + A$,

alors :

$$\begin{aligned} g < \frac{c\alpha}{d}(a+A)(k-A) - \alpha + A &\implies dg < c\alpha(a+A)(k-A) - d\alpha + dA \\ &\implies d(\alpha + g + A) - c\alpha(a+A)(k-A) \\ &\implies a(g+A)(d(\alpha + g + A) - c\alpha(a+A)(k-A)) < 0 \end{aligned}$$

Alors $\dot{V}(g, h) < 0$.

Donc d'après le théorème 3.2 le point au système (0,0) est asymptotiquement stable par rapport au système (3.6) au voisinage de $] -M, M[\times] -B(a+A)(k-A), +B(a+A)(k-A)[$, avec $M = \min\{A, \frac{c\alpha}{d}(a+A)(k-A) - \alpha + A\}$.

D'où la stabilité de le point $\omega_2 \left(\frac{c\alpha}{d-c}, \frac{a\alpha}{b}(a+A)(k-A) \right)$ par rapport au système (3.5).

□

3.5 Modèle logistique de Lotka-Volterra dans le cas d'une réponse fonctionnelle de Holling type III

$$\begin{cases} x' = ax - \frac{a}{k}x - \frac{bx^2y}{\alpha + x^2} \\ y' = \frac{dyx^2}{\alpha + x^2} - cy \end{cases} \quad (3.7)$$

où $a; b; c; d, k$ et α sont des constantes positives telles que :

a : le taux de croissance intrinsèque de la proie en l'absence de prédateur.

b : le taux de prédation (d'attaque) maximale du prédateur sur la proie.

$\sqrt{\alpha}$: la constante de demi-saturation pour le prédateur, qui est la quantité de proies au cours de laquelle la réponse fonctionnelle du prédateur est à moitié maximale.

d : le taux de conversion de la biomasse de proies en prédateurs.

c : le taux de mortalité du prédateur en l'absence de proie.

k : la capacité de portée du milieu en proies.

Les points d'équilibre :

on a :

$$\begin{cases} x' = 0 \\ y' = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} ax(1 - \frac{x}{k}) - \frac{bx^2y}{\alpha + x^2} = 0 \\ y(\frac{dx^2}{\alpha + x^2} - c) = 0 \end{cases}$$

$$\implies (x,y) = (0,0) \text{ ou } (x,y) = (\sqrt{\frac{c\alpha}{d-c}}, BA(1 - \frac{A}{k})) \text{ ou } (x,y) = (k,0) .$$

Où $d > c, k > A$ et $A = \sqrt{\frac{c\alpha}{d-c}}, B = \frac{ad}{bc}$

Théorème 3.3. Supposons que les conditions suivantes sont vérifiées :

$$H1) \frac{a\alpha}{b} - dAB(1 - \frac{A}{k}) - BA(1 - \frac{A}{k}) > 0$$

$$H2) \alpha cbBA(1 - \frac{A}{k}) - A > 0$$

Alors le point d'équilibre $\omega_3(\sqrt{\frac{c\alpha}{d-c}}, BA(1 - \frac{A}{k}))$ du système (3.7) est asymptotiquement stable.

Démonstration. On pose $x = g + \sqrt{\frac{c\alpha}{d-c}}$ et $y = h + BA(1 - \frac{A}{k})$. Alors :

$$(g, h) = (0,0) \text{ si } (x, y) = (\sqrt{\frac{c\alpha}{d-c}}, BA(1 - \frac{A}{k})) .$$

Par substitution dans (3.7) on obtient :

$$\begin{cases} g' = a(g + A)(1 - \frac{g + A}{k}) + \frac{b(g + A)^2(h + BA(1 - \frac{A}{k}))}{\alpha + (g + A)^2} \\ h' = (h + BA(1 - \frac{A}{k}))(\frac{d(g + A)^2}{\alpha + (g + A)^2} - c) \end{cases} \quad (3.8)$$

Considérons la fonction :

$V :] - A, +\infty[\times] - BA(1 - \frac{A}{k}), +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{aligned} V(g, h) &= d \int_A^{g+A} \frac{u - A}{u} du + b \int_{BA(1 - \frac{A}{k})}^{h+BA(1 - \frac{A}{k})} \frac{v - BA(1 - \frac{A}{k})}{v} dv \\ &= dg - dA \ln(\frac{g + A}{A}) + bh - bBA(1 - \frac{A}{k}) \ln(\frac{h + BA(1 - \frac{A}{k})}{BA(1 - \frac{A}{k})}) \end{aligned}$$

On voit d'après lemme 2.6 :

$V(g, h) > 0$ pour tout $(g, h) \in]-A, +\infty[\times]-BA(1 - \frac{A}{k}), +\infty[-\{(0,0)\}$ et $V(g, h) = 0$ si et seulement si $(g, h) = (0,0)$.

On a :

$$\frac{\partial V}{\partial g} = d - \frac{dA}{g + A}$$

$$\frac{\partial V}{\partial h} = b - \frac{bBA(1 - \frac{A}{k})}{h + BA(1 - \frac{A}{k})}$$

Donc

$$\begin{aligned} \dot{V}(g, h) &= \frac{\partial V}{\partial g} \cdot \frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial h} \cdot \frac{\partial h}{\partial t} \\ &= (d - \frac{dA}{g + A})(a(g + A)(1 - \frac{g + A}{k}) + \frac{b(g + A)^2(h + BA(1 - \frac{A}{k}))}{\alpha + (g + A)^2}) + \\ &\quad (b - \frac{bBA(1 - \frac{A}{k})}{h + BA(1 - \frac{A}{k})})((h + BA(1 - \frac{A}{k}))(\frac{d(g + A)^2}{\alpha + (g + A)^2} - c)) \\ &= ad(g + A)(1 - \frac{g + A}{k}) - \frac{db(g + A)^2(h + BA(1 - \frac{A}{k}))}{\alpha + (g + A)^2} - daA(1 - \frac{g + A}{k}) + \\ &\quad \frac{dbA(g + A)(h + BA(1 - \frac{A}{k}))}{\alpha + (g + A)^2} + (\frac{db(g + A)^2}{\alpha + (g + A)^2} - bc)(h + BA(1 - \frac{A}{k})) + \\ &\quad (\frac{dbBA(g + A)^2(1 - \frac{A}{k})}{(\alpha + (g + A)^2)(h + BA(1 - \frac{A}{k}))} - \\ &\quad \frac{cbBA(1 - \frac{A}{k})}{h + BA(1 - \frac{A}{k})})(h + BA(1 - \frac{A}{k})) \\ &= ad(g + A)(1 - \frac{A}{k}) - \frac{db(g + A)^2(h + BA(1 - \frac{A}{k}))}{\alpha + (g + A)^2} - daA(1 - \frac{g + A}{k}) + \\ &\quad \frac{dbA(g + A)(h + BA(1 - \frac{A}{k}))}{\alpha + (g + A)^2} + \frac{b(g + A)^2}{\alpha + (g + A)^2}(d - \alpha c)(h + BA(1 - \frac{A}{k})) + \\ &\quad \frac{bBA(g + A)^2(1 - \frac{A}{k})}{\alpha + (g + A)^2}(d - \alpha c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{V}(g, h) &< [da(g+A) \frac{\alpha + (g+A)^2}{\alpha + (g+A)^2} - \frac{\alpha cbBA(g+A)^2(1 - \frac{A}{k})}{\alpha + (g+A)^2}] + [-daA \frac{\alpha + (g+A)^2}{\alpha + (g+A)^2} + \\ &\frac{dbBA(g+A)^2(1 - \frac{A}{k})}{\alpha + (g+A)^2}] + [\frac{-\alpha cb(g+A)^2(h + BA(1 - \frac{A}{k}))}{\alpha + (g+A)^2} + \\ &\frac{dbA(g+A)(h + BA(1 - \frac{A}{k}))}{\alpha + (g+A)^2}] \\ &< [\frac{(g+A)^2}{\alpha + (g+A)^2}(-\alpha cbBA(1 - \frac{A}{k}) + da\alpha(g+A) + da(g+A))] + \\ &[\frac{dA(g+A)}{\alpha + (g+A)^2}(bB(1 - \frac{A}{k}) - a\alpha)] + [\frac{b(g+A)(h + BA(1 - \frac{A}{k}))}{\alpha + (g+A)^2}] \end{aligned}$$

1. D'après les hypothèses on a : $\alpha cbBA(1 - \frac{A}{k}) - A > 0$, si on pose :

$$g < \alpha cbBA(1 - \frac{A}{k}) - A, \text{ alors :}$$

$$g < \alpha cbBA(1 - \frac{A}{k}) - A \implies g(da\alpha + da) < \alpha cbBA(1 - \frac{A}{k}) - da\alpha A - daA$$

$$\implies a(g+A)(d(\alpha + g+A) - c\alpha(a+A)(k-A)) < 0$$

2. D'après les hypothèses on a : $\frac{a\alpha}{b} - dAB(1 - \frac{A}{k}) - BA(1 - \frac{A}{k}) > 0$ Si on :

$$h < \frac{a\alpha}{b} - dAB(1 - \frac{A}{k}) - BA(1 - \frac{A}{k}), \text{ alors :}$$

$$h < \frac{a\alpha}{b} - dAB(1 - \frac{A}{k}) - BA(1 - \frac{A}{k}) \implies bh < a\alpha - dbAB(1 - \frac{A}{k}) - BAb(1 - \frac{A}{k})$$

$$\implies [(g+A)][dbAB(1 - \frac{A}{k}) - a\alpha + b(h + BA(1 - \frac{A}{k}))] < 0$$

Alors $\dot{V}(g, h) < 0$

Donc d'après le théorème 3.3 le point au système (0,0) est asymptotiquement stable par rapport au système (3.8) au voisinage de $] - M, M[\times] - N, N[$

avec $M = \min\{A, \alpha cbBA(1 - \frac{A}{k}) - A\}$.

$$N = \min\{B, \frac{a\alpha}{b} - dAB(1 - \frac{A}{k}) - BA(1 - \frac{A}{k})\}$$

D'où la stabilité de le point $\omega_3(\sqrt{\frac{c\alpha}{d-c}}, BA(1 - \frac{A}{k}))$ par rapport au système (3.7). \square

3.6 Modèle classique de mutualisme interspécifique

$$\begin{cases} x' = ax - \frac{a}{k}x - bxy \\ y' = dy - \frac{1}{\alpha}y^2 + cxy \end{cases} \quad (3.9)$$

où $a; b; c; d, k$ et α sont des constantes positives telles que :

a : le taux de croissance intrinsèque de la proie en l'absence de prédateur.

b : le taux de prédation (d'attaque) maximale du prédateur sur la proie.

α : la capacité limite des prédateurs .

c : le taux de conversion de la biomasse de proies en prédateurs.

d : le taux de croissance intrinsèque des prédateurs .

k : la capacité de portée du milieu en proies.

Les points d'équilibre :

on a :

$$\begin{cases} x' = 0 \\ y' = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} ax(1 - \frac{x}{k}) - bxy = 0 \\ dy(1 - \frac{y}{\alpha}) + cxy = 0 \end{cases}$$

$$\implies (x,y) = (0,0) \text{ ou } (x,y) = (\frac{AB}{C}, \frac{DE}{C}) \text{ ou } (x,y) = (k,0) \text{ ou } (x,y) = (0,\alpha)$$

Où : $a > b\alpha, ad > cbk\alpha$ et $A = kd, B = a - b\alpha, C = ad - cbk\alpha, D = a\alpha, E = d + ck$.

Théorème 3.4. Supposons que les conditions suivantes sont vérifiées :

$$H1) ad < cb\frac{DE}{C}, C < AB$$

$$H2) a - \frac{DE}{C} > 0$$

$$H3) \frac{adDE}{bcAB} - \frac{DE}{C} > 0$$

Alors le point d'équilibre $\omega_4(\frac{AB}{C}, \frac{DE}{C})$ du système (3.9) est stable.

Démonstration. On pose $x = g + \frac{AB}{C}$ et $y = h + \frac{DE}{C}$. Alors :

$$(g, h) = (0,0) \text{ si } (x, y) = \left(\frac{AB}{C}, \frac{DE}{C}\right).$$

Par substitution dans (3.9) on obtient :

$$\begin{cases} g' = a(g + \frac{AB}{C})(1 - \frac{g + \frac{AB}{C}}{k}) + b(g + \frac{AB}{C})(h + \frac{DE}{C}) \\ h' = d(h + \frac{DE}{C})(1 - \frac{h + \frac{DE}{C}}{\alpha}) + c(g + \frac{AB}{C})(h + \frac{DE}{C}) \end{cases} \quad (3.10)$$

Considérons la fonction :

$V :] - \frac{AB}{C}, +\infty[\times] - \frac{DE}{C}, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{aligned} V(g, h) &= d \int_{\frac{AB}{C}}^{g + \frac{AB}{C}} \frac{u - \frac{AB}{C}}{u} du + b \int_{\frac{DE}{C}}^{h + \frac{DE}{C}} \frac{v - \frac{DE}{C}}{v} dv \\ &= dg - d \frac{AB}{C} \ln\left(\frac{g + \frac{AB}{C}}{\frac{AB}{C}}\right) + bh - b \frac{DE}{C} \ln\left(\frac{h + \frac{DE}{C}}{\frac{DE}{C}}\right) \end{aligned}$$

On voit d'après lemme 2.6 : $V(g, h) > 0$ pour tout $(g, h) \in] - \frac{AB}{C}, +\infty[\times] - \frac{DE}{C}, +\infty[$ et $V(g, h) = 0$ si et seulement si $(g, h) = (0, 0)$.

On a :

$$\frac{\partial V}{\partial g} = d - \frac{dAB}{C(g + \frac{AB}{C})}$$

$$\frac{\partial V}{\partial h} = b - \frac{bDE}{C(h + \frac{DE}{C})}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \dot{V}(g, h) &= \frac{\partial V}{\partial g} \cdot \frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial h} \cdot \frac{\partial h}{\partial t} \\ &= \left(d - \frac{dAB}{C(g + \frac{AB}{C})}\right) \left(a\left(g + \frac{AB}{C}\right) \left(1 - \frac{g + \frac{AB}{C}}{k}\right) + b\left(g + \frac{AB}{C}\right) \left(h + \frac{DE}{C}\right)\right) + \\ &\quad \left(b - \frac{bDE}{C(h + \frac{DE}{C})}\right) \left(d\left(h + \frac{DE}{C}\right) \left(1 - \frac{h + \frac{DE}{C}}{\alpha}\right) + c\left(g + \frac{AB}{C}\right) \left(h + \frac{DE}{C}\right)\right) \\ &= ad\left(g + \frac{AB}{C}\right) \left(1 - \frac{g + \frac{AB}{C}}{k}\right) + db\left(g + \frac{AB}{C}\right) \left(h + \frac{DE}{C}\right) - ad \frac{AB}{C} \left(1 - \frac{g + \frac{AB}{C}}{k}\right) - \\ &\quad db \frac{AB}{C} \left(h + \frac{DE}{C}\right) + db\left(h + \frac{DE}{C}\right) \left(1 - \frac{h + \frac{DE}{C}}{\alpha}\right) + \\ &\quad bc\left(g + \frac{AB}{C}\right) \left(h + \frac{DE}{C}\right) - bd \frac{DE}{C} \left(1 - \frac{h + \frac{DE}{C}}{\alpha}\right) - cb \frac{DE}{C} \left(g + \frac{AB}{C}\right) \\ &< \left(g + \frac{AB}{C}\right) \left(ad - cb \frac{DE}{C}\right) + db\left(h + \frac{DE}{C}\right) \left(1 - \frac{AB}{C}\right) + db \frac{AB}{C} \left(\left(h + \frac{DE}{C}\right) - a\right) + \\ &\quad \frac{bcAB\left(h + \frac{DE}{C}\right) - adDE}{C} \end{aligned}$$

Comme on a :

1. D'après les hypothèses on a $ad < cb\frac{DE}{C}$ donc $(g + \frac{AB}{C})(ad - cb\frac{DE}{C}) < 0$
 et $C < AB$ alors $db(h + \frac{DE}{C})(1 - \frac{AB}{C})$.

2. D'après les hypothèses on a : $a - \frac{DE}{C} > 0$ Si on :
 $h < a - \frac{DE}{C}$, alors : $h + \frac{DE}{C} < a$

3. D'après les hypothèses on a : $\frac{adDE}{bcAB} - \frac{DE}{C} > 0$ Si on :

$h < \frac{adDE}{bcAB} - \frac{DE}{C}$, alors :

$$h < \frac{adDE}{bcAB} - \frac{DE}{C} \implies bcABh < adDE - bcAB\frac{DE}{C}$$

$$\implies \frac{bcAB(h + \frac{DE}{C}) - adDE}{C} < 0$$

□

Alors (d'après 1. 2. et 3.) : $\dot{V}(g, h) \leq 0$

Donc d'après le théorème 3.4 le point au système (0,0) est stable par rapport au système (3.10) au voisinage de $]-\frac{AB}{C}, \frac{AB}{C}[\times]-N, N[$ avec $N = \min\{\frac{DE}{C}, a - \frac{DE}{C}, \frac{adDE}{bcAB} - \frac{DE}{C}\}$.

D'où la stabilité de le point $\omega_4(\frac{AB}{C}, \frac{DE}{C})$ par rapport au système (3.9).

Chapitre 4

conclusion et Perspectives

A la lumière de cette étude, nous voulons montrer qu'une bonne utilisation des fonctions positives dans la méthode de Lyapunov sur les systèmes différentiels des modèles mathématiques de deux populations en interaction (choix des conditions initiales et des paramètres adéquats), peut permettre la description qualitative du comportement des populations.

Cette technique peut être utilisé comme un outil numérique puissant pour l'analyse paramétrique de la stabilité de certains phénomènes biologiques comme :

1. Le modèle proie prédateur incorporant un refuge pour les proies.
2. Le modèle proie prédateur avec comportement de troupeau des proies.
3. Dynamique de la transmission des maladies infectieuses

Et généralement pour les systèmes différentiels autonomes.

Bibliographie

- [1] A. Chikhaoui, (2000) . Contribution à l'Etude de la Stabilité des Systèmes Non Linéaires, Thèse de Magister en Physique Electronique, Université de Tlemcen (2000).
- [2] A. M. LYAPUNOV : Stability of motion : General problem. International Journal of Control, 55(3), march 1992.
- [3] Burton, T. A., *Stability and periodic solutions of ordinary and functional differential equations* .Mathematics in science and engineering, Volume 178, Academic Press, INC, 1985.
- [4] Grégory Vial, *Le système proie-prédateur de Volterra-Lotka*. 14 novembre 2007 .
- [5] H. K. Khalil : Nonlinear systems. Prentice Hall, New York, 2002.
- [6] Hale, Jack K and Lunel, Sjoerd M Verduyn Introduction to functional differential equations, *volume 99, 2013, Springer Science et Business Media*
- [7] Holling, C. S., Some characteristics of simple types of predation and parasitism, Canadian Entomologist, 91, 385-398, (1959).

- [8] Holling, C. S., The components of predation as revealed by a study of smallmammal predation of the European pine sawy, *Canadian Entomologist*, 91, 293-320, (1959).
- [9] Holling, C. S., The Functional Response of Predators to Prey Density and its Role in Mimicry and Population Regulation, *Memoirs of the Entomological Society of Canada*, Vol. 45, 3-60 (1965).
- [10] Moulay Emmanuel, *Stabilité des équations différentielles ordinaires*, 2007.
- [11] Renshaw, E. *Modelling Biological Populations in Space and Time*, Cambridge Studies in Mathematical Biology, Cambridge University Press (1991).
- [12] Van den Driessche, Pauline, and James Watmough. Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission, *Mathematical biosciences* 180.1 . 2002. p. 29-48. 26-47.